

北海道大学 正員 三上 隆

北海道大学 正員 芳村 仁

1. はじめに 本報告は、静的荷重が作用する軸対称シエルの解析を精度よく行うための数値解析法として、選点法の適用性を検討したものである。シエルの静的解析に関しては、FEMやFDMなど数多くの研究が報告されているが両手法とも解法の簡明さなどという利点がある一方、計算精度の向上を計るため格子間隔を小さく選んだり、要素細分割の必要性が生じ、連立一次方程式の次数が増大するという難点もある。またFEMでは分割度の向題以前に中央面の曲面形状をいかに近似するかという向題がある。ここで述べる選点法は直交多項式の根を選点とするもので、選点は境界近傍に密に配置されるという利点があり、通常の方法に比べて連立一次方程式の次数が高くなることもない。また、微分方程式を基調とするので、FEMなどに見られる曲面形状の適合性を向上させるための特別な工夫も必要としない。なお、シエル理論はNovozhilovの諸論を基礎とし、微分方程式、境界条件式が変位成分で表わされる場合および変位成分と軸線方向曲げモーメントで表わされる場合について検討を行った。

2. 解析方法

2.1) 基本式 軸方向、円周方向、法線方向変位 u, v, w と軸方向曲げモーメント M_x を級数展開すると次式となる。

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n U_n \cos n\theta, \quad v = \sum_{n=0}^{\infty} a_n V_n \sin n\theta$$

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} a_n W_n \cos n\theta, \quad M_x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n E h m_n \cos n\theta$$

ここで、 a = 半径、 h = シエル厚、 E = 弾性係数、 m = 展開次数、 U, V, W, M_x = 無次元化された変位と曲げモーメント。

軸方向座標 $x[0, 1]$ に於ける常微分方程式 F と境界条件式 B は次のように与えられる。

変位成分で表わしたとき(基本式(I))

$$F_i(x, u, u', u'', v, v', v'', w, w', w'', M_x, M_x', M_x'') = 0, \quad i=1 \sim 3$$

$$B_i(x, u, v, w, u', v', w', \dots) = 0, \quad i=1 \sim 8$$

変位成分と M_x で表わしたとき(基本式(II))

$$F_i(x, u, u', u'', v, v', v'', w, w', w'', m_x, m_x', m_x'') = 0, \quad i=1 \sim 4$$

$$B_i(x, u, v, w, m_x, u', v', w', m_x') = 0, \quad i=1 \sim 8$$

ここで、 $' = d(\quad)/dx$ である。

2.2) 選点法 試行関数は次式を用いる。

$$\text{基本式(I)のとき} \quad U = \sum_{i=1}^{N+2} a_i x^{i-1}$$

$$V = \sum_{i=1}^{N+2} b_i x^{i-1}, \quad W = \sum_{i=1}^{N+2} c_i x^{i-1}$$

$$\text{基本式(II)のとき} \quad U = \sum_{i=1}^{N+2} a_i x^{i-1}$$

$$V = \sum_{i=1}^{N+2} b_i x^{i-1}, \quad W = \sum_{i=1}^{N+2} c_i x^{i-1}, \quad m_x = \sum_{i=1}^{N+2} d_i x^{i-1}$$

ここで、 $a_i \sim d_i$ は任意定数、 N = 内部選点数

基本式(I)に現れる導関数は1~4次、(II)で1と2次であり、それらを選点(Shifted Legendre多項

式の零点)での解の値と結びつけるマトリックスを求める。

次にこれらを用いて微分方程式の残差の条件を求め境界条件を考慮することにより、内部選点における解の値を未知量とする連立一次方程式が得られる。

$[\alpha]\{\delta\} = \{f\}$, ここで $\{f\}$ = 荷重項, 内部選点数 N とすると基本式(I)を用いるとき $[\alpha]$ は $3N \times 3N$ の大きさ、 $\{\delta\}^T = \{U(x_1) \dots U(x_{N+1}), V(x_1) \dots V(x_{N+1}), W(x_1) \dots W(x_{N+1})\}$, 基本式(II)を用いるとき $[\alpha]$ は $4N \times 4N$ の大きさ、 $\{\delta\}^T = \{U(x_1) \dots U(x_{N+1}), V(x_1) \dots V(x_{N+1}), W(x_1) \dots W(x_{N+1}), m_x(x_1) \dots m_x(x_{N+1})\}$ となる。 $x_1 \sim x_{N+1}$ は内部選点。

3. 数値計算例

① 液圧を受ける円筒殻 $L/a = 0.85$, $h/a = 0.04$, ν (ポアソン比) = 0.25の円筒殻の液圧(比重 $=\gamma$)による変位 w , 軸方向曲げモーメント M_x を図-1に示す。基本式(I), (II)のどちらを用いても、シエル理論値と完全に一致した。

② 風圧を受ける円筒殻 風圧を受けて傾くような高い構造物は曲げモーメントをたけり同程度の精度で求めることはしばしば困難となることは知られている。ここでは、図-2に示すモデル($L/a = 2$, $h/a = 0.005$, $\nu = 0.3$)により検討を加える。風圧分布は高さ方向に一定とし、円周方向の分布曲線は次式を用いた。 $P = P_0 \sum_{n=0}^6 a_n \cos n\theta = P_0(-0.387 + 0.338 \cos \theta + 0.533 \cos 2\theta + 0.471 \cos 3\theta + 0.166 \cos 4\theta - 0.066 \cos 5\theta - 0.055 \cos 6\theta)$ θ = 円周方向円周上側からの経角。結果をシエル理論値との比較で図-3に示す。(a), (b)は自由端におけるたけり w と固定端での面内力 N_s である。 $N = 11$ とし基本式(I), (II)のどちらを用いても、理論値と良好な一致を得た。図-3(c)は固定端での曲げモーメントで、基本式(II)を用い、2領

域に等分割し各領域に $N=11$ を用いて得られた結果である。図では数値的比較が判然としないので表-1にその数値を示す。表で CASE(a) とは基本式(I)を用い分割がない場合, CASE(b), (c) とは基本式(I), (II)を用い, 領域を2等分割した場合である。例えば,

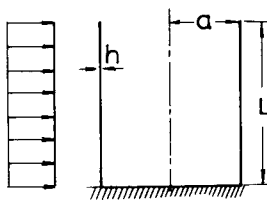


図-2 風荷重を受ける円筒殻

$\theta=0$ での理論値に対する差は(a)で4.2%, (b)で0.6%, (c)で0.1%である。特に, CASE(c)では, いずれの θ においても理論値に対する差は1%未満と良好な一致を示している。

③ 外圧を受ける球殻 一様な外圧を受ける端部固定の解析結果を図-4に示す。この種の荷重が作用する場合, 支持端から離れると膜応力状態が成立するのが普通である。FEM(円錐台要素)では全領域に曲げモーメントが発生しているが, 本手法による結果は上記の欠点が改善されている。特に領域を2等分割し, $N=11$ による結果は, 膜応力状態がほぼ完全に成立している。なお, Stricklinらは曲線要素を提案し円錐台要素の欠点が改善されることを示している。

表-1 固定端での M_s/pa^2 の値

θ	Exact	Collocation method case (a)	case (b)	case (c)
0°	-0.1099 (-1)	-0.1053 (-1)	-0.1093 (-1)	-0.1100 (-1)
15°	-0.8853 (-2)	-0.8493 (-2)	-0.8792 (-2)	-0.8859 (-2)
30°	-0.2268 (-2)	-0.2185 (-2)	-0.2205 (-2)	-0.2270 (-2)
45°	0.6395 (-2)	0.6154 (-2)	0.6462 (-2)	0.6399 (-2)
60°	0.1079 (-1)	0.1039 (-1)	0.1086 (-1)	0.1080 (-1)
75°	0.7246 (-2)	0.6955 (-2)	0.7314 (-2)	0.7251 (-2)
90°	0.2537 (-3)	0.1996 (-3)	0.3193 (-3)	0.2552 (-3)
105°	-0.3043 (-2)	-0.2958 (-2)	-0.2978 (-2)	-0.3044 (-2)
120°	-0.1449 (-2)	-0.1386 (-2)	-0.1385 (-2)	-0.1450 (-2)
135°	0.9316 (-3)	0.9197 (-3)	0.9959 (-3)	0.9316 (-3)
150°	0.1426 (-2)	0.1381 (-2)	0.1491 (-2)	0.1427 (-2)
165°	0.8353 (-3)	0.7973 (-3)	0.9002 (-3)	0.8360 (-3)
180°	0.5126 (-3)	0.4822 (-3)	0.5775 (-3)	0.5132 (-3)

(-x) = 10^{-x}

4. まとめ

数値計算例にみられるように, 本手法は比較的簡単な手続きで解を求めることができ, 小規模な連立一次方程式で精度のよい解析が可能となる。また, 本報告で取り扱った単一シエルのみでなく, 形状の異なるシエルが組合さった肉題にも適用可能である。

参考文献

1) 三上, 考村, 第34回

土木学会年報要覧 1979

2) D. J. Toms et al. ASCE 99 (EM5) 1973 PP943

3) J. A. Stricklin et al. AIAA Journal 4(11) 1966 PP2069

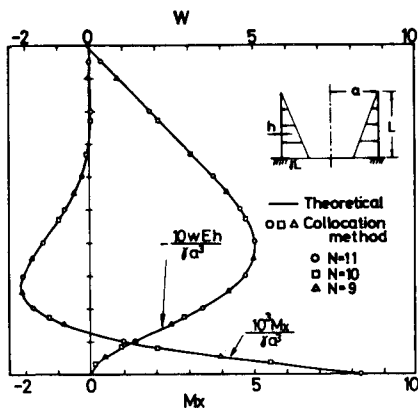


図-1 液圧を受ける円筒殻の w, M_x 分布

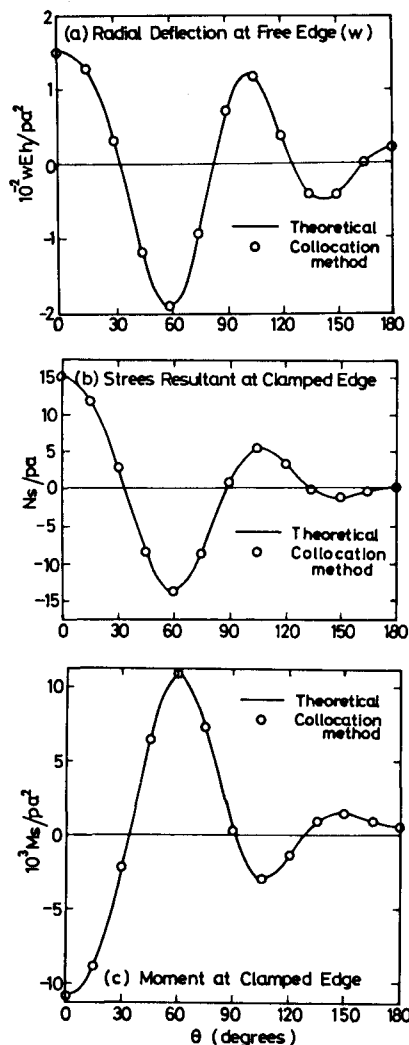


図-3 風荷重を受ける円筒殻の w, N_s, M_s 分布

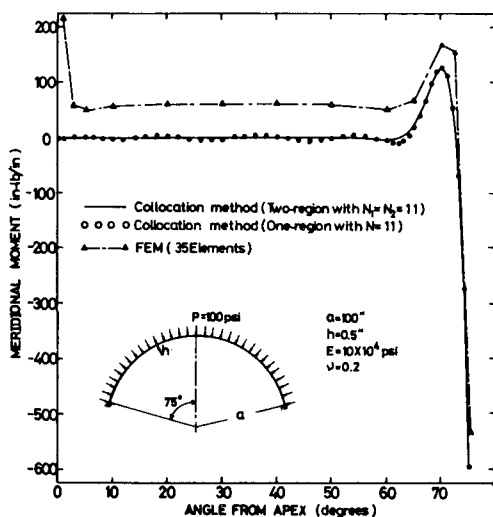


図-4 球殻の経線方向曲げモーメント