

1. まえがき 等質・等大の2つの球の接触問題は、これを、変形後の1つの球に着目すると、中実球の表面の1部が剛体で圧縮されたスタンフの問題に帰着される。本研究は、中実球の表面の1部が変位成分によって規定され、他の部分が応力成分によって規定されたスタンフの解析を近似解法によって行ったものである。軸対称問題としての中実球、球殻及び無限体中の球殻の第1種及び第2種境界値問題は、3次元弾性論の書物において良く見受けられる所であるが、混合境界値問題については、あまり見受けられないようである。数値計算例においては、球の接触問題の解析に従来用いられている Hertz の公式による結果との比較も行った。

2. 線荷重を受けた時の解 中実球の表面の $\theta = \theta_0$ と $\theta = \pi - \theta_0$ との円周上に2個の線垂直荷重 P_L と線せん断荷重 $P_S \sin \theta_0$ とが作用しているときの解は

$$\left. \begin{aligned} 2G \Delta r &= \sum_{n=2}^{\infty} r^{n-2} A_n'''' n(n-1) P_n(\mu) + \sum_{n=2}^{\infty} r^{n-1} (n+1)(n-2+4\nu) E_n P_n(\mu) - 2(1-2\nu) E_0 r \\ 2G \Delta \theta &= - \sum_{n=2}^{\infty} r^{n-2} A_n'''' n(n-1) P_n'(\mu) - \sum_{n=2}^{\infty} r^{n-1} (n+1)(n-2+4\nu) E_n P_n'(\mu) \\ \sigma_{rr} &= \sum_{n=2}^{\infty} r^{n-2} A_n'''' n(n-1) P_n(\mu) + \sum_{n=2}^{\infty} r^n (n+1)(n^2-n-2-2\nu) E_n P_n(\mu) - 2(1+\nu) E_0 \\ \sigma_{r\theta} &= - \sum_{n=2}^{\infty} r^{n-2} A_n'''' n(n-1) P_n'(\mu) - \sum_{n=2}^{\infty} r^n (n+1)(n^2-n-1+2\nu) E_n P_n'(\mu) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

ここで、 G はせん断弾性係数及び ν はポアソン比を表わすものとし、また

$$\left. \begin{aligned} A_n'' &= - \frac{\sin \theta_0}{(n-1) \Delta_n R_2^{n-1}} \{ P_L (2n+1) P_n(\cos \theta_0) (n^2+2n-1+2\nu) - P_S \{ P_{n-1}(\cos \theta_0) \\ &\quad - P_{n+1}(\cos \theta_0) \} (n+1)(n^2-n-2-2\nu) \} \\ E_n &= \frac{\sin \theta_0}{\Delta_n R_2^{n+1}} \{ P_L (2n+1) P_n(\cos \theta_0) - n P_S \{ P_{n-1}(\cos \theta_0) - P_{n+1}(\cos \theta_0) \} \} \\ E_0 &= \frac{P_S \sin \theta_0}{2(1+\nu) R_2}, \Delta_n = 2 \{ n^2 + n + 1 + \nu(2n+1) \}, \mu \equiv \cos \theta, n=2, 4, 6, \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

となるので、 $0 < \theta \leq \theta_0$ の区間に線荷重 P_L が1個、線荷重 $P_S \sin \theta_0$ が1個作用している時の解は、式(1)における θ の π までの総和を取ることによって得られ、たとえば、次の通りである。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{\theta_0}^{\pi} r^{n-2} A_n'''' n(n-1) P_n(\mu) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{\theta_0}^{\pi} r^n (n+1)(n^2-n-2-2\nu) E_n P_n(\mu) - 2(1+\nu) \sum_{\theta_0}^{\pi} E_0 \\ \sigma_{r\theta} &= - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{\theta_0}^{\pi} r^{n-2} A_n'''' n(n-1) P_n'(\mu) - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{\theta_0}^{\pi} r^n (n+1)(n^2-n-1+2\nu) E_n P_n'(\mu) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

3. 境界条件 図-1に示した中実球のスタンフの境界条件は、次の通りである。

$r = R_2, 0 \leq \theta < \theta_0$ において

$$\Delta r = -R_2(\mu - \cos \theta_0)\mu, \Delta \theta = R_2(\mu - \cos \theta_0) \sin \theta \dots \dots \dots (4)$$

$$r = R_2, \theta_0 < \theta < \pi - \theta_0 \text{ において } \sigma_{rr} = 0, \sigma_{r\theta} = 0 \dots \dots \dots (5)$$

$r = R_2, \pi - \theta_0 < \theta \leq \pi$ において

$$\Delta r = -R_2(\mu + \cos \theta_0)\mu, \Delta \theta = R_2(\mu + \cos \theta_0) \sin \theta \dots \dots \dots (6)$$

式(5)の境界条件は、式(3)においてすでに満足されている。なぜなら式(3)における応力成分は、 $0 < \theta \leq \theta_0$ の区間の $\theta = \theta_0$ のみに線荷重が作用したときの解を単に重ね合わせた解であるからである。 $z=0$ に関

て、上、下対称であるので、式(4)の境界条件について考えると次式が得られる。

$$\sum_{n=2}^{\infty} P_L \sin \theta_0 \{ (1-2\nu) / \{ 2(1+\nu) \} + \sum_{n=2}^{\infty} P_n(\mu) / \{ (n-1) \Delta_n \} (2n+1) P_n(\cos \theta_0) [2n^2 - 1 - \nu(2n^2 - n - 2)] \}$$

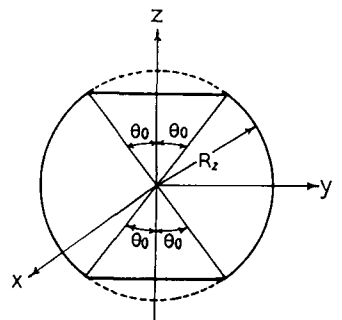


図-1 中実球のスタンフ

$$+\sum_{k=1}^L \bar{p}_k (-\sin \theta_k) \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} n(n+1) / (n-1) \Delta n \left\{ P_n(\mu) [P_{n-1}(\cos \theta_k) - P_{n+1}(\cos \theta_k)] \right\} [\pi - 2 - \nu(2n-1)] \right\} = (\mu - \cos \theta_0) \times \mu, \quad \bar{p}_k = p_k / (GR_2), \quad \bar{q}_k = q_k / (GR_2) \dots \dots \dots (7a)$$

$$\sum_{k=1}^L \bar{p}_k \sin \theta_k \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} P_n'(\mu) / (n-1) \Delta n \left\{ P_n(\cos \theta_k) (2n+1) [\pi - 2 - \nu(2n-1)] \right\} + \sum_{k=1}^L \bar{q}_k (-\sin \theta_k) \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} P_n'(\mu) / (n-1) \Delta n \left\{ P_{n-1}(\cos \theta_k) - P_{n+1}(\cos \theta_k) \right\} [2n^2 - n + 1 - \nu(2n^2 - 3n - 1)] \right\} \right\} = -(\mu - \cos \theta_0) \sin \theta \dots \dots (7b)$$

上の2つの式は、 $0 \leq \theta < \theta_0$ の区間における任意の θ に関して満足すべきものであるが、近似的に、 $0 + \varepsilon \leq \theta_k \leq \theta_0$ ($k=1, 2, \dots, L$) の区間の L 個の各点において満足するようにすると、 $2L$ 元連立1次方程式を解いて L 個の $\bar{p}_k$ 及び $\bar{q}_k$ を数値的に求めることになる。表面の $0 \leq \theta \leq \theta_0$ における合力は圧縮力を正と取ると次式となる。

$$N_k/G = -F_x R_2^2, \quad F_x = 2\pi \int_{\cos \theta_0}^1 \{ (\sigma_{rr})_{r=R_2} \mu - (\sigma_{\theta\theta})_{r=R_2} \sin \theta \} d\mu$$

4. 数値計算例 $\theta_0 = \pi/16$, $\varepsilon = 0.005$, $L = 80$ 及び n は偶数のみ 90 項取り、ポアソン比を種々変えて計算した。この解析においては、表面の接触面の半径 a 及びたわみ w は既知量となっているが、合力 N_k/G を Hertz の公式

$$a = d [3(1-\nu) R_2 N_k / (8G)]^{1/3}, \quad w = \beta \cdot 2 [3(1-\nu) N_k / (8G \sqrt{R_2})]^{2/3}$$

ここで、 a : 接触面の半径、 w : 表面のたわみに代入して、 α 及び β を求めた結果が表-1 である。 $\alpha = \beta = 1.0$ の時が Hertz の公式である。

表-1 に示されているように、 α は種々のポアソン比にほぼ 1.0 となっているが、 β はほぼ 0.3 となっており、たわみについては Hertz の公式による結果と大きな相違を示している。この解析においては、中実球の表面の $0 < \theta < \theta_0$ の区間にせん断応力 $\sigma_{\theta r}$ が存在し、接触面に摩擦がある場合に該当しているため、一致しないのは当然であるが、接触面の摩擦の有無がたわみに大きな影響を及ぼすことが表-1 より判る。図-2 には垂直応力 σ_{rr} の分布を示した。 r 方向における減衰が著しく、 r/R_2 が 0.5 以下ではほぼ 0 となる。

図-3 には、せん断応力 $\sigma_{\theta r}$ の分布を示した。 σ_{rr} に比較すると、ほぼ $1/3$ の大きさであり、 σ_{rr} と同様に r 方向における減衰が早く、 r/R_2 が 0.4 以下ではほぼ 0 となる。また、表面における値は σ_{rr} の場合と異なり、 $\theta = \theta_0$ において不連続性を示している。

謝辞 この研究は、中実球の接触問題に関する能町純雄教授（北海道大学工学部土木工学科）との談話の中で、接触問題の1つの基本的問題として氏により提示されたテーマである。記して感謝申し上げます。

表-1 Hertz の公式との比較

ν	$-F_z$	α	β
0.00	0.0189	1.01	0.260
0.20	0.0209	1.06	0.282
0.25	0.0222	1.06	0.283
0.30	0.0222	1.08	0.296
0.40	0.0256	1.08	0.298
0.45	0.0282	1.08	0.296

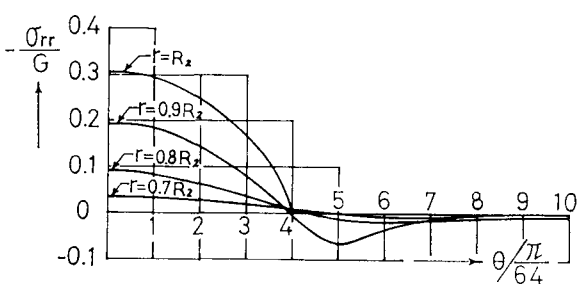


図-2 σ_{rr} の分布 ($\nu=0.25$)

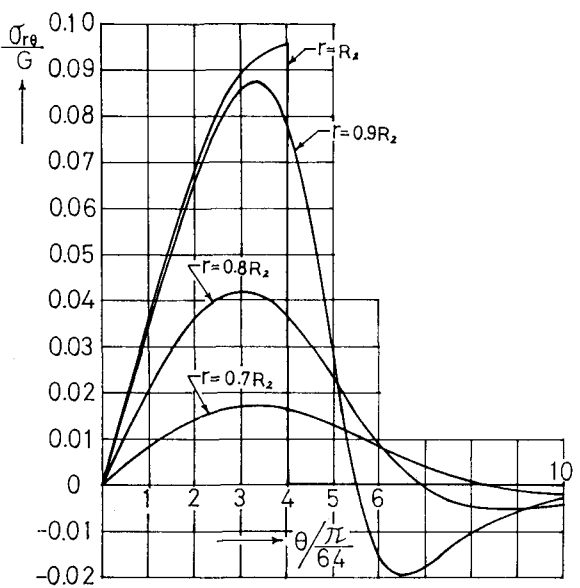


図-3 $\sigma_{\theta r}$ の分布 ($\nu=0.25$)