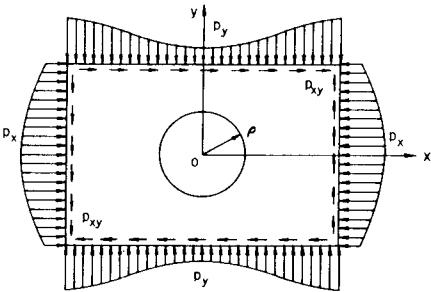


北海道大学工学部 正員 ○ 林 川 俊 郎
北海道大学工学部 正員 渡 辺 昇

1. まえがき

最近、土木、建築、機械、造船などの各種構造物に、円孔を有する薄肉板が数多く使用される傾向にある。この有孔長方形板が面内荷重を受けるとき、孔縁の近傍に応力集中が生ずることはよく知られている。したがって、面内荷重を受ける有孔長方形板の応力分布および変位分布状態を正確に知ることは重要な問題である。

円孔を有する有限長方形板の二次元弾性問題の解析方法としては、(1)有限要素法¹⁾、(2)階差法、(3)選点法、(4)実数型の Airy の応力関数による解析方法²⁾、(5)複素応力関数による解析方法^{3,4)}などがあげられる。本研究は選点法と複素応力関数による解析方法との両者を用いて、有孔長方形板の応力分布および変位分布を解析する。つまり、複素解析関数 $\phi(z)$ 、 $\psi(z)$ を Laurent 級数の展開形で仮定し、孔縁の境界条件を解析接続法 (Schwarz の鏡像の原理⁵⁾) により恒等的に満足させ、外縁の境界条件を選点法により近似的に満足させることにより複素解析関数を決定する。この種の解析例としては、須見、関谷³⁾は一樣変位を受ける有孔長方形板を解析しており、後藤⁴⁾は孔縁の境界条件を Cauchy の積分定理を用いて孔をもつ有限板の解析を示している。最後に、数値計算例により、一樣な直応力および面内曲げ応力を受ける有孔長方形板を解析し、他の解析方法との比較および円孔の大きさが応力集中に与える影響について検討する。



図一 / 有孔長方形板

2. 面内荷重を受ける有孔長方形板の解析方法

図一 / のように、中心に円孔のある有限長方形板が一樣な面内荷重 (p_x, p_y, p_{xy}) を受ける二次元弾性問題について考える。周知のように、2 個の複素解析関数 $\phi(z)$ 、 $\psi(z)$ による面内応力成分 ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$)、面内変位成分 (u, v) および境界上の力の釣り合い関係式は次のように与えられる^{5,6)}。

$\sigma_x + \sigma_y = 4\text{Re}\{\phi'(z)\} \dots\dots (1) \quad \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2\{\bar{z}\phi''(z) + \psi''(z)\} \dots\dots\dots (2)$

$u + iv = (1 + \nu) / E \{ \kappa \phi(z) - z \overline{\phi'(z)} - \overline{\psi'(z)} \} \dots (3) \quad i(P_x + iP_y) = \phi(z) + z \overline{\phi'(z)} + \overline{\psi'(z)} \dots (4)$

ここに、 $z = x + iy$ 、 $i^2 = -1$ 、 $\kappa = (3 - \nu) / (1 + \nu)$ 、 E = 弾性係数、 ν = ポアソン比、 P_x, P_y = x, y 方向の合力、 Re は実部を表わす。また、図一 / の孔縁、外縁における境界条件は次式により与えられる。

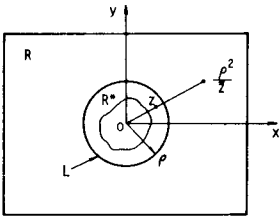
(a) 孔縁： イ) 円孔自由の場合 $i(P_x + iP_y) = 0$ 、 ロ) 円孔固定の場合 $u + iv = 0 \dots\dots (5)$

(b) 外縁： イ) $x = \pm a / 2 \quad \sigma_x = \pm p_x, \tau_{xy} = \pm p_{xy}$ 、 ロ) $y = \pm b / 2 \quad \sigma_y = \pm p_y, \tau_{xy} = \pm p_{xy} \dots\dots (6)$

式(5)の円孔の境界条件を満足する複素解析関数を求めるために、解析接続法 (Schwarz の鏡像の原理⁵⁾) を用いる。いま有孔長方形板領域 R を図一 2 に示すように、円 $|z| = \rho$ に関する反転領域 R^* へ拡張する。そこで、円孔の境界条件を満足するように解析接続すると、複素解析関数 $\phi(z)$ は $\phi(z)$ により、次式のように書き表わされる。

$\phi'(z) = -\frac{\rho^2}{z} \phi'(\frac{\rho^2}{z}) + \lambda \overline{\phi(\frac{\rho^2}{z})}, \quad z \in R \dots\dots\dots (7)$

ただし、円孔自由の場合は $\lambda = -1$ 、円孔固定の場合は $\lambda = \kappa$ である。



図一 2 解析接続

したがって、有孔長方形板の応力解析は残る外縁の境界条件式(6)を満足するように複素解析関数 $\varphi(z)$ を決定することに帰着される。この複素解析関数 $\varphi(z)$ は応力、変位、合力、合モーメントの一価性を考慮すれば、 $R+R^*$ を含む領域で Laurent級数の展開形として、次のように表示できる。

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{2N} \alpha_n z^{2(n-N)+1}, \quad (N=\text{有限項}) \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 α_n は未知の複素係数である。この式(8)は $2N$ 個の未知複素係数を含んでいる。そこで、図-3のように長方形板の境界辺上に適当な $2N$ 個の点を取り、式(7)と(8)を用いて、式(6)に代入すると、未知複素係数に関する $2N$ 元連立一次方程式が得られる。これを解くと未知複素係数 α_n が求められ、式(8)の複素解析関数 $\varphi(z)$ が決定される。最後に、式(1)、(2)、(3)における応力および変位は複素解析関数 $\varphi(z)$ のみにより次のように表される。

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\text{Re}\{\varphi'(z)\} \quad (9) \quad \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2\left[(\bar{z} - \rho^2/z)\varphi''(z) + \rho^2/z^2\{\varphi'(z) - \lambda\overline{\varphi'(\rho^2/z)}\}\right] \quad (10)$$

$$u + iv = (1+\nu)/E\{\kappa\varphi(z) - \lambda\varphi(\rho^2/\bar{z}) - (z - \rho^2/\bar{z})\overline{\varphi'(z)}\} \dots\dots (11)$$

3. 数値計算例

数値計算例として、図-4のように中心に円孔をもつ長方形板(辺長比 $\alpha=b/a$ 、開孔比 $\beta=2\rho/a$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$)について解析した。表-1は円孔をもつ正方形に、外部荷重比($\lambda_x, \lambda_y, \lambda_{xy}$)=(1, 1, 0)を受けるときの孔縁応力を示す。また、他の解析結果との比較のために、孔縁の境界条件を Cauchyの積分定理で処理している後藤⁴⁾の解と、実数型の Airyの応力関数を用いた Schlack²⁾の解が示されている。本研究による解は両者の解とよく一致しており、選点数も $N=5$ 程度で十分正確な解が得られる。図

θ°	$\beta=0.3$			$\beta=0.5$		
	Writers	Gotoh	Schlack	Writers	Gotoh	Schlack
0	2.154	2.153	2.152	2.420	2.411	2.408
10	2.159	2.158	2.158	2.461	2.453	2.450
20	2.173	2.172	2.172	2.562	2.556	2.555
30	2.188	2.187	2.187	2.671	2.667	2.667
40	2.198	2.197	—	2.738	2.735	—
45	2.199	2.199	2.220	2.747	2.745	2.746

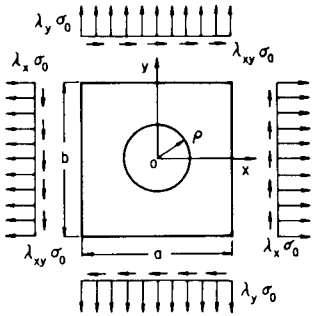


表-1 円孔をもつ正方形板の孔縁応力

図-4 数値計算モデル

一5、6は x 軸上の σ_y 応力分布、 y 軸上の σ_x 応力分布を示す。図中の点線は応力集中係数を表わす。開孔比 β の値が大きくなるにつれて、応力集中係数が大きくなるのがわかる。なお、数値計算は北大大型計算機センターHITAC-200Hを使用した。

- (参考文献)
- 1) 吉識、川井、吉村：日本造船協会論文集，第120号，1966.
 - 2) Schlack and Little：J. Eng. Mech. Div., ASCE, Vol. 90, 1964.
 - 3) 須見、関谷：日本機械学会論文集，第354号，1976.
 - 4) 後藤：土木学会論文報告集，第234号，1975.
 - 5) 森口：2次元弾性理論，岩波.
 - 6) Muskhelishvili：Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, Noordhoff, 1963.

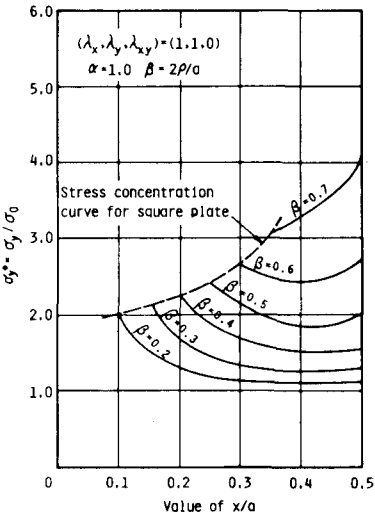


図-5 x 軸上の σ_y 応力分布

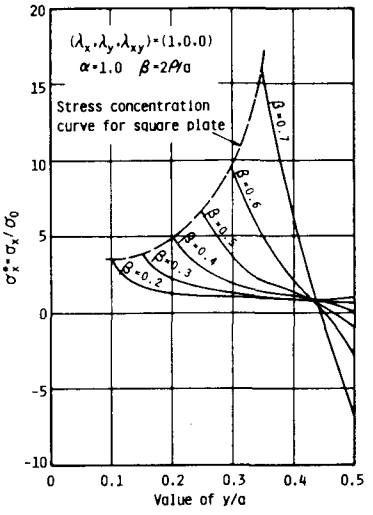


図-6 y 軸上の σ_x 応力分布