

○正会員 大同工業大学 水澤富作

正会員 名古屋大学 梶田建夫

1. まえがき 板の厚さが増大するにつれて、せん断効果及び垂直応力の影響が無視できなくなり、これまでに、これらの影響を考慮した多くの板の曲げ理論が提案されている。本文では、Reissnerの板理論を用いてVojjadjisとBaluch¹⁾により提案されたReissnerの板方程式の近似解式への選点最小二乗法の適用について述べる。ここで、Vojjadjisらにより与えられたReissnerの板方程式の近似解式は、従来の変位関数で応力関数、または有限要素法の解式で用いられるたわみ w と2つの回転角 θ_x, θ_y を未知関数として解く方法と異なり、たわみ w のみを未知関数として表示され、一般に高次の偏微分方程式で与えられる。このような高次の基礎方程式及び境界条件を直接用いて定式化する選点最小二乗法を2, 3の厚板の曲げ解析に適用し、本法の有用性、簡易性及び精度について検討する。

2. 解析手法 — 混合選点最小二乗法の定式化 選点最小二乗法は、重みつき残差法の一手法として古くから知られており、最近EASON²⁾はこの方法の分類及び応用について詳述している。また有限要素法への適用も多く見られる。この方法は、用いる変位関数が基礎方程式のみ満す(境界法)、境界条件のみ満す(内部法)、さらに両者とも満さない混合法に分類できる。選点最小二乗法では、二乗残差 I_d を定式化するにあたり、積分を行なう必要がなく、また得られた係数マトリックスが常に対称性を示す。しかしながら、基礎方程式が高次の導関数を含む場合には、用いる変位関数に高次の連続性が要求される。ここでは、区分的多項式として知られる高次の連続性に近似性をもつB-spline関数を変位関数に用いる。

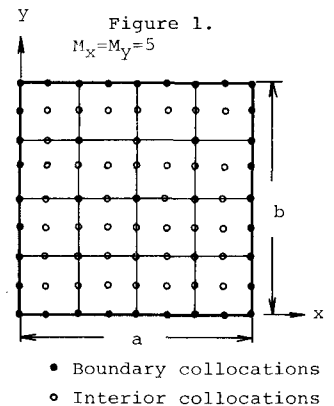
図-1に示すような二次元線形境界値問題について考える。基礎微分方程式は、 $Lw = f$ (領域Aにおいて) — (1)、またこの式は、次のような境界条件を伴っている。 $Bw = g$ (領域Aの境界Sにおいて) — (2) ただし、L, Bは演算子を示し、f, gはそれぞれ与えられた関数である。変位関数 w はB-spline関数を用いて次式で仮定する。 $w = W(C, x, y) = \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} C_{mn} N_{m,k}(x) N_{n,k}(y)$, $i_x = K + M_x - 2$, $i_y = K + M_y - 2$ — (3) ここで、 $K-1$ はB-spline関数の次数を、 M_x, M_y は、区分数を示す。したがって、式(3)をそれぞれ式(1), (2)に代入すると、系の誤差関数は次式で示される。

$$R_L(C, x_i, y_i) = Lw(C, x_i, y_i) - f(x_i, y_i) \quad (\text{領域A内の選点}) \quad (4)$$

$E_L R_B(C, x_i, y_i) = E_L \{Bw(C, x_i, y_i) - g(x_i, y_i)\}$ (領域Aの境界S上の選点) — (5)、さらに、両式をマトリックス表示すると次式で与えられる。 $\{R\} = [Z]\{C\} - \{P\}$ — (6)。ここで、 R_L, R_B は、それぞれ内部残差、境界残差である。よって、混合選点最小二乗法での、二乗残差 I_d は、領域A内と境界S上での有限個の選点(x_i, y_i)で評価され、それぞれを検討したもので、次式で与えられる。

$$I_d = \sum_{i=1}^M [R_L(C, x_i, y_i)]^2 + (E_L)^2 \sum_{i=M+1}^{M+J} [R_B(C, x_i, y_i)]^2 \quad (7)$$

ここで、 M は領域A内の選点の数、 J は境界S上の選点での境界条件の総数を示す。また、式(7)で用いた $(E_L)^2$ は、内部残差に対する境界残差の相対的な重み係数である。



(参考文献) 1). G.Z. Vojjadjis and M.H. Baluch, 'Thick plates on elastic foundations: one-variable formulation', Proc. of ASCE, vol. 105, EM6, 1041-1045 (1979), 2) E.D. Eason, 'A review of least-squares methods for solving partial differential equations', Int. J. Num. Meth. Eng., vol. 10, 1021-1046 (1976).

したがって、二乗残差 I_d を最小化すると、

$$\partial I_d / \partial \{C\} = [Z]^T [Z] \{C\} - [Z]^T \{P\} = [K] \{C\} - \{F\} = 0, \quad -(8) \text{ が得られる。}$$

ここで、 $[K]$ は、常に対称性を示す。

3. 厚板の曲げ解析への適用: *Toyiasidis* と *Baluch* により与えられた、変位関数 W のみで示される *Reissner* の板方程式の近似解式を一般式で書くと次式で示される。ここで、 γ は、基礎式の近似次数を示す。

$$H^{r-2} D \nabla^r w + H^{r-3} D \nabla^{r-1} w + H^{r-4} D \nabla^{r-2} w + \dots = q, \quad -(9)$$

$$V_x = -H^{r-2} D (\partial \nabla^{r-1} w / \partial x) - H^{r-3} D (\partial \nabla^{r-2} w / \partial x) - H^{r-4} D (\partial \nabla^{r-3} w / \partial x) - \dots, \quad -(10)$$

$$V_y = -H^{r-2} D (\partial \nabla^{r-1} w / \partial y) - H^{r-3} D (\partial \nabla^{r-2} w / \partial y) - H^{r-4} D (\partial \nabla^{r-3} w / \partial y) - \dots, \quad -(11)$$

$$M_x = -D (\partial^2 w / \partial x^2 + \nu \partial^2 w / \partial y^2) - \{D h^2 / 5 (1 - \nu)\} (\partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2) (H^{r-3} \nabla^{r-2} w + H^{r-4} \nabla^{r-3} w + \dots) + \{\nu h^2 D / 10 (1 - \nu)\} (H^{r-3} \nabla^{r-1} w + H^{r-4} \nabla^{r-2} w + \dots), \quad -(12)$$

$$M_y = -D (\partial^2 w / \partial y^2 + \nu \partial^2 w / \partial x^2) - \{D h^2 / 5 (1 - \nu)\} (\partial^2 / \partial y^2 + \nu \partial^2 / \partial x^2) (H^{r-3} \nabla^{r-2} w + H^{r-4} \nabla^{r-3} w + \dots) + \{\nu h^2 D / 10 (1 - \nu)\} (H^{r-3} \nabla^{r-1} w + H^{r-4} \nabla^{r-2} w + \dots), \quad -(13)$$

$$M_{xy} = -(1 - \nu) D \partial^2 w / \partial x \partial y - \{D h^2 / 5\} \partial^2 (H^{r-3} \nabla^{r-2} w + H^{r-4} \nabla^{r-3} w + \dots) / \partial x \partial y \quad -(14)$$

ここで、 $r = 3, 4, 5, \dots$ 、また $r < i$ では $H^i = 0$ である。 $\nabla = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$, $D = E h^3 / 12 (1 - \nu^2)$, $h = (2 - \nu) h^2 / 10 (1 - \nu)$ であり、 h は板厚を、 ν はポアソン比を、また E は弾性係数を示す。

4. 数値計算例示の考察

Table 1. では、等分布荷重を受ける同辺単純支持された正方形板 ($a/b = 1.0$, $R/a = 0.1$, $\nu = 0.3$) の解の収束性に与える基礎方程式の近似次数 r 、区分英の数 $M_x = M_y$ の影響について示した。また、*Reissner* の理論を用いて厳密解を求めた *Salerno* の結果を列挙した。これより、方程式の近似次数を大きくとり、また区分英の数を増大することによって厳密解への収束性が得れた。

Table 1. Convergence study of the results of simply supported square plate to uniform load; $a/b=1.0$, $h/a=0.1$, $E_1^2=10^4$ and $\nu=0.3$.				
The order of approximation, r				
The number of knots $M_x=M_y$	3*		5**	
	W	M_x	W	M_y
	$(a/2, a/2)$		$(a/2, a/2)$	
9	4.291	4.982	4.277	4.899
11	4.265	4.843	4.256	4.821
13	4.249	4.826	4.243	4.816
15	4.243	4.823	4.242	4.812
Salerno et al (Exact)	4.242	4.81		
classical theory	4.062	4.789		
Multipliers	$10^{-3} q a^4 / D$	$10^{-2} q a^2$	$10^{-3} q a^4 / D$	$10^{-2} q a^2$

*, ** the degrees of B-spline $k=7$ and 9 is respectively used.

Table 2 では、種々の板厚比をもつ

正方形板の中央英でのたわみ W について、

他の近似解との比較を示した。

ここで、*Pryor* は、20 自由度の長方形要素を、*Rao* は、36 自由度の三角形要素を、また *Mohr* は、18 自由度の三角形要素を用いて計算したものである。これより、 R/a が小さい場合には、低次の近似解式

Table 2. Coefficients for center deflection $W(10^{-3} D / q a^4)$ of simply supported square plate to uniform load; $a/b=1.0$, $E_1^2=10^4$ and $\nu=0.3$.

h/a	present results*			FEM (Pryor)	FEM (Rao)	FEM (Mohr)	Reissner theory	classical theory
	$r=3 (h/a)$	$r=4 (h/a)$	$r=5 (h/a)$					
0.01	4.064	4.064	4.064	4.050	-	-	4.065	4.062
0.05	4.108	4.107	4.107	4.092	4.105	3.987	4.108	4.062
0.10	4.249	4.245	4.243	4.223	4.237	4.182	4.242	4.062
0.15	4.452	4.456	4.461	4.443	4.456	4.441	4.465	4.062
0.20	4.834	4.793	4.780	4.749	4.763	4.777	4.777	4.062

* the present results were calculated using $M_x=M_y=13$.

を用いても良い結果が得られているが、

R/a が大きくなると、高次の近似解式を用いれば、良い精度が示される。

5. あとがき 高次の変位関数で示された *Reissner* の板方程式への変換二乗法の適用について述べ、その有用性、簡易性、解の収束性、精度について検討し、良好な結果を得た。

この手法を用いれば、容易に他の問題にも適用できる。