I-16　曲げと引張りを受ける直交異方性中等厚板の一理論

大阪市立大学　正員　堀川　都志雄
大阪市立大学　正員　園田　恵一郎

1はしがき： 横せん断変形を考慮した中等厚板に関する理論が数多く提案されてきた。等方性板に対しては A.E.H. Love，E. Reissner および A. Kromm らの研究があり、直交異方性板では K. Girkmann[1]，V. Panc[2] および S.A. Ambartsumyan[3] らによるものがあげられる。例えば、K. Girkmann[1] は等方性板の Reissner 理論を異方性板に拡張し、S.A. Ambartsumyan[3] は6階の基礎微分方程式からなるポテンシャル関数を導入することによって解析を行っている。しかしながら、鉛直荷重のみが作用する曲げ問題でも鉛直応力による影響が無視出来ず、引張り問題をも伴うことは3次元理論[4]より明らかであるので、水平および鉛直方向の外荷重が同時に作用する場合にはこれまでのいずれの理論も十分であるとは言い難い。本研究では S.A. Ambartsumyan[3] の理論を任意方向の外荷重下でも取扱える様に拡張する為に、曲げ問題に関して3つまた引張り問題で2つのそれぞれ独立なポテンシャル関数を誘導する。さらに、等方性の Reissner 理論および2次元問題での Galerkin vector[5] との関連性を検討することによって、これらのポテンシャル関数の性質を明らかにする。

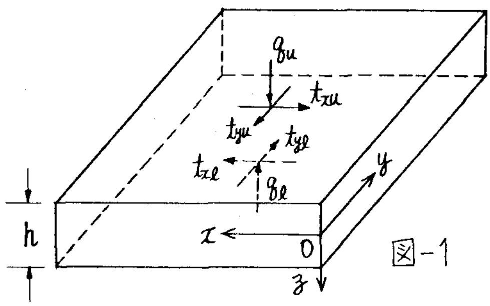

図-1

2理論式： 直交異方性体の弾性係数を C_{ij} とする。
応力と変位の関係は次のように与えられる。

$$\sigma_x = a_{11}\partial_x u + a_{12}\partial_y v + a_{13}\sigma_z \;,\quad \tau_{xz} = C_{55}(\partial_x w + \partial_z u)\;,$$
$$\sigma_y = a_{12}\partial_x u + a_{22}\partial_y v + a_{23}\sigma_z \;,\quad \tau_{yz} = C_{66}(\partial_z v + \partial_y w)$$
$$\tau_{xy} = C_{44}(\partial_y u + \partial_x v) \;, \qquad \text{———}(1)$$

ここで、$a_{11} = C_{11} - C_{13}^2/C_{33}$，$a_{12} = C_{12} - C_{13}C_{23}/C_{33}$，
$a_{22} = C_{22} - C_{23}^2/C_{33}$，$\partial_x = \partial/\partial x$，$\partial_y = \partial/\partial y$，$\partial_z = \partial/\partial z$

◦断面力のつりあい式（図-1参照）

i)曲げ問題

$$\partial_x M_x + \partial_y M_{xy} - Q_x + \frac{h}{2}t_{xp} = 0\;,$$
$$\partial_x M_{xy} + \partial_y M_y - Q_y + \frac{h}{2}t_{yp} = 0\;,$$
$$\partial_x Q_x + \partial_y Q_y - q_m = 0 \qquad \text{———}(2)$$

ii)引張り問題

$$\partial_x N_x + \partial_y N_{xy} + t_{xm} = 0\;,$$
$$\partial_x N_{xy} + \partial_y N_y + t_{ym} = 0 \qquad \text{———}(3)$$

ここで、$t_{xp} = t_{xl} + t_{xu}$，$t_{yp} = t_{yl} + t_{yu}$，
$t_{xm} = t_{xl} - t_{xu}$，$t_{ym} = t_{yl} - t_{yu}$，
$q_p = q_l + q_u$，$q_m = q_l - q_u$，
$T_p = \partial_x t_{xp} + \partial_y t_{yp}$，$T_m = \partial_x t_{xm} + \partial_y t_{ym}$

◦断面力とたわみ w，せん断力 Q_x および Q_y との関係式

i)曲げ問題

$$M_x = -(\bar{D}_{11}\partial_x^2 + \bar{D}_{12}\partial_y^2)w + E_{11}\partial_x Q_x + E'_{12}\partial_y Q_y - \frac{h}{12}(E_{11}\partial_x t_{xp} + E'_{12}\partial_y t_{yp}) - F_{33}\left(q_m - \frac{h}{12}T_p\right)\;,$$
$$M_y = -(\bar{D}_{12}\partial_x^2 + \bar{D}_{22}\partial_y^2)w + E_{12}\partial_x Q_x + E_{22}\partial_y Q_y - \frac{h}{12}(E_{12}\partial_x t_{xp} + E_{22}\partial_y t_{yp}) - F'_{33}\left(q_m - \frac{h}{12}T_p\right)\;,$$
$$M_{xy} = -2D'_{12}\partial_x\partial_y w + E_{23}\partial_y Q_x + E'_{23}\partial_x Q_y - \frac{h}{12}(E_{23}\partial_y t_{xp} + E'_{23}\partial_x t_{yp}) \qquad \text{———}(4)$$

ii)引張り問題

$$N_x = G_{11}\partial_x u_0 + G_{12}\partial_y v_0 + H_{11}\partial_x t_{xm} + H'_{12}\partial_y t_{ym} + H_{13}\left(-q_p + \frac{h}{6}T_m\right)\;,$$
$$N_y = G_{12}\partial_x u_0 + G_{22}\partial_y v_0 + H_{12}\partial_x t_{xm} + H_{22}\partial_y t_{ym} + H_{23}\left(-q_p + \frac{h}{6}T_m\right)\;,$$
$$N_{xy} = G_{21}(\partial_y u_0 + \partial_x v_0) + H_{44}\partial_y t_{xm} + H'_{44}\partial_x t_{ym} \qquad \text{———}(5)$$

ここで、u_0 および v_0 は板中央面での x および y 方向の水平変位である。

式(4)および(5)を式(2)および(3)に代入することにより次式を得る。上添字 o は直交異方性体を示す。

i)曲げ問題

$$\left[D_{11}\partial_x^3 + D_{12}\partial_x\partial_y^2\right]w - \left[E_{11}\partial_x^2 + E_{23}\partial_y^2 - 1\right]Q_x - (E'_{12} + E'_{23})\partial_x\partial_y Q_y = X_1^o\;,$$
$$\left[D_{12}\partial_x^2\partial_y + D_{22}\partial_y^3\right]w - (E_{12} + E_{23})\partial_x\partial_y Q_x - \left[E'_{23}\partial_x^2 + E_{22}\partial_y^2 - 1\right]Q_y = X_2^o\;,$$
$$\partial_x Q_x + \partial_y Q_y = X_3^o \qquad \text{———}(6)$$

ii)引張り問題

$$(G_{11}\partial_x^2 + G_{21}\partial_y^2)u_0 + (G_{12} + G_{21})\partial_x\partial_y v_0 = -Y_1^o\;,$$
$$(G_{12} + G_{21})\partial_x\partial_y u_0 + (G_{21}\partial_x^2 + G_{22}\partial_y^2)v_0 = -Y_2^o$$
$$\text{———}(7)$$

ここで、$X_1^\circ = \frac{h}{2} t_{xp} - \frac{h}{12}(E_{11}\partial_x^2 + E_{23}\partial_y^2) t_{xp} - \frac{h}{12}(E_{12}'+E_{23}')\partial_x\partial_y t_{xp}$
$\quad - F_{33}\partial_x(q_m - \frac{h}{12}T_p)$,
$X_2^\circ = \frac{h}{2}t_{yp} - \frac{h}{12}(E_{12}+E_{23})\partial_x\partial_y t_{xp} - \frac{h}{12}(E_{23}'\partial_x^2 + E_{22}\partial_y^2)t_{yp}$
$\quad - F_{33}'\partial_y(q_m - \frac{h}{12}T_p)$,
$X_3^\circ = q_m$

ここで、$Y_1^\circ = t_{xm} + (H_{11}\partial_x^2 + H_{44}\partial_y^2)t_{xm}$
$\quad + (H_{12}'+H_{44}')\partial_x\partial_y t_{ym} - H_{13}\partial_x(q_p - \frac{h}{6}T_m)$,
$Y_2^\circ = t_{ym} + (H_{12}+H_{44})\partial_x\partial_y t_{xm}$
$\quad + (H_{44}'\partial_x^2 + H_{22}\partial_y^2)t_{ym} - H_{23}\partial_y(q_p - \frac{h}{6}T_m)$

◦ポテンシャル関数の基礎式　曲げおよび引張り問題のポテンシャル関数をそれぞれΦ°およびψ°とすると、

$$\{D_{11}\partial_x^4 + 2D_{12}\partial_x^2\partial_y^2 + D_{22}\partial_y^4 - D_{11}E_{23}'\partial_x^6 - \{D_{11}(E_{22}-E_{12}-E_{23}) + D_{12}(E_{11}-E_{12}')\}\partial_x^4\partial_y^2 - \{D_{12}(E_{22}-E_{12}) + D_{22}(E_{11}-E_{12}'-E_{23}')\}\partial_x^2\partial_y^4 - D_{22}E_{23}\partial_y^6\}\Phi^\circ = -X^\circ \quad (8)$$

$$\{G_{11}G_{21}\partial_x^4 + (G_{11}G_{22} - 2G_{12}G_{21} - G_{12}^2)\partial_x^2\partial_y^2 - G_{21}G_{22}\partial_y^4\}\psi^\circ = -Y^\circ \quad (9)$$

ここで、$\Phi^\circ = \Phi_1^\circ i + \Phi_2^\circ j + \Phi_3^\circ k$, $X^\circ = X_1^\circ i + X_2^\circ j + X_3^\circ k$,　$\psi^\circ = \psi_1^\circ i + \psi_2^\circ j$,　$Y^\circ = Y_1^\circ i + Y_2^\circ j$.

◦ポテンシャル関数と変位およびせん断力との関係式

$$w = \partial_x\{E_{23}'\partial_x^2 + (E_{22}-E_{12}-E_{23})\partial_y^2 - 1\}\Phi_1^\circ + \partial_y\{(E_{11}-E_{12}'-E_{23}')\partial_x^2 + E_{23}\partial_y^2 - 1\}\Phi_2^\circ$$
$$+ \{E_{11}E_{23}'\partial_x^4 + \{E_{11}E_{22} + E_{23}E_{23}' - (E_{12}+E_{23})(E_{12}'+E_{23}')\}\partial_x^2\partial_y^2 + E_{22}E_{23}\partial_y^4 - (E_{11}+E_{23}')\partial_x^2 - (E_{22}+E_{23})\partial_y^2 + 1\}\Phi_3^\circ ,$$

$$Q_x = -\partial_y^2\{D_{12}\partial_x^2 + D_{22}\partial_y^2\}\Phi_1^\circ + \partial_x\partial_y\{D_{11}\partial_x^2 + D_{12}\partial_y^2\}\Phi_2^\circ$$
$$+ \partial_x\{D_{11}E_{23}'\partial_x^4 + (D_{11}E_{22} - D_{12}E_{12}')\partial_x^2\partial_y^2 + \{D_{12}E_{22} - D_{22}(E_{12}'+E_{23}')\}\partial_y^4 - (D_{11}\partial_x^2 + D_{12}\partial_y^2)\}\Phi_3^\circ ,$$

$$Q_y = \partial_x\partial_y\{D_{12}\partial_x^2 + D_{22}\partial_y^2\}\Phi_1^\circ - \partial_x^2\{D_{11}\partial_x^2 + D_{12}\partial_y^2\}\Phi_2^\circ$$
$$+ \partial_y[\{D_{22}E_{11} - D_{11}(E_{12}+E_{23})\}\partial_x^4 + (D_{22}E_{11} - D_{12}E_{12})\partial_x^2\partial_y^2 + D_{22}E_{23}\partial_y^4 - (D_{12}\partial_x^2 + D_{22}\partial_y^2)]\Phi_3^\circ . \quad (10)$$

$$u_0 = (G_{21}\partial_x^2 + G_{22}\partial_y^2)\psi_1^\circ - (G_{12}+G_{21})\partial_x\partial_y\psi_2^\circ ,$$
$$v_0 = -(G_{12}+G_{21})\partial_x\partial_y\psi_1^\circ + (G_{11}\partial_x^2 + G_{21}\partial_y^2)\psi_2^\circ \quad (11)$$

〈等方性板との比較〉　上添字Ⅰは等方性体を示す。（$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$　, ν;ポアソン比）

i)曲げ問題

式(8)および(10)は、次のようになる。

$$D\Delta\Delta(1-\frac{h^2}{10}\Delta)\Phi^I = -X^I \quad (12)$$

$$w = (\frac{h^2}{10}\Delta - 1)\{\partial_x\Phi_1^I + \partial_y\Phi_2^I + (\frac{h^2}{5}\frac{1}{1-\nu}\Delta - 1)\Phi_3^I\} ,$$
$$Q_x = -D\Delta\{\partial_y^2\Phi_1^I - \partial_x\partial_y\Phi_2^I - \partial_x(\frac{h^2}{10}\Delta-1)\Phi_3^I\} ,$$
$$Q_y = -D\Delta\{-\partial_x\partial_y\Phi_1^I + \partial_x^2\Phi_2^I - \partial_y(\frac{h^2}{10}\Delta-1)\Phi_3^I\} \quad (13)$$

式(12)と(13)より、微分演算子$(\frac{h^2}{10}\Delta-1)$が共通しているので、式(13)は次のように置換えられる。

$$w = (\frac{h^2}{10}\Delta-1)\{\partial_x\Phi_1^I + \partial_y\Phi_2^I\} - (\frac{h^2}{5}\frac{1}{1-\nu}\Delta-1)\phi_3^I ,$$
$$Q_x = -D\Delta\{\partial_y^2\Phi_1^I - \partial_x\partial_y\Phi_2^I\} - D\partial_x\Delta\phi_3^I + \partial_y\phi_4^I ,$$
$$Q_y = -D\Delta\{-\partial_x\partial_y\Phi_1^I + \partial_x^2\Phi_2^I\} - D\partial_y\Delta\phi_3^I - \partial_x\phi_4^I \quad (14)$$

ポテンシャルの基礎式は、次のように得られる。

$$D\Delta\Delta\phi_3^I = -X_m^I = q_m , \quad (1-\frac{h^2}{10}\Delta)\phi_4^I = 0 \quad (15)$$

さらに、式(14)に演算子$D\Delta\Delta$および$\Delta(\frac{h^2}{10}\Delta-1)$を作用させると

$$D\Delta\Delta w = D\Delta\Delta(\frac{h^2}{10}\Delta-1)\{\partial_x\Phi_1^I + \partial_y\Phi_2^I\} - D\Delta\Delta(\frac{h^2}{5}\frac{1}{1-\nu}\Delta-1)\phi_3^I$$
$$= -q_m + \frac{h^2}{10}\frac{2-\nu}{1-\nu}\Delta q_m + \frac{h}{2}T_p - \frac{h^3}{120}\frac{2-\nu}{1-\nu}\Delta T_p ,$$
$$(\frac{h^2}{10}\Delta-1)Q_x = D\partial_x\Delta w - \frac{1}{10}\frac{1}{1-\nu}\partial_x q_m - \frac{h}{2}t_{xp}$$
$$+ \frac{h^3}{120}\{\frac{2-\nu}{1-\nu}\partial_x^2 t_{xp} + \partial_y^2 t_{yp} + \frac{1}{1-\nu}\partial_x\partial_y t_{yp}\} \quad (16)$$

関数ϕ_4^Iは、せん断力による応力関数となり、式(16)はE.Reissnerによる式系と一致している。

ii)引張り問題　（μ;せん断弾性係数）

式(9)および(11)は、次のようになる。

$$(2\mu)^2 h^2 \frac{1}{2(1-\nu)}\Delta\Delta\psi^I = -Y^I \quad (17)$$

$$u_0 = (2\mu h)\{\frac{1}{1-\nu}[\frac{1-\nu}{2}\partial_x^2 + \partial_y^2]\psi_1^I - \frac{1+\nu}{2(1-\nu)}\partial_x\partial_y\psi_2^I\} ,$$
$$v_0 = (2\mu h)\{-\frac{1+\nu}{2(1-\nu)}\partial_x\partial_y\psi_1^I + \frac{1}{1-\nu}[\partial_x^2 + \frac{1-\nu}{2}\partial_y^2]\psi_2^I\} \quad (18)$$

$\psi^I = [(1-\nu)/(\mu\sqrt{2h})]^2\Theta$ とすると、関数Θは2次元問題のGalerkin vector[5]と一致する。

詳細と数値計算例については、当日発表する。

1) Girkmann, K. and Beer, R.: Anwendung der verschärften Platten Theorie nach Eric Reissner auf orthotropic Platten, Öster. Ing.-Arch., XII (1958).
2) Panc, V.: Theories of Elastic Plates, Noordhoff (1975)　3) Ambartsumyan, S.A.: Theory of Anisotropic Plates, Technomic (1970)　4) Sonoda, K. and Horikawa, T.: Displacement functions for an orthotropic elastic body and their applications to thick plate problems, NCTAM, Vol.29 (1981). 5) 長谷川久夫:二次元弾性問題の変位関数のある性質, 機械学会論文集, 第41巻, 第352号, 昭和50年.