

山梨大学・工学部 正員 平島 健一
福島高等専門学校 正員 根岸 嘉和

1. 緒言.

著者の一人は先に、応力仮定にもとづく平板曲げの理論について発表したが⁽¹⁾、応力連続性が生じる層状性板や板厚と支向の比 $2b/L$ が大きくなると必ずしも精度よい結果が得られないことから、ここでは、その欠点を取り除くため三次元変位 u_j ($j=1, 2, 3$) と平板の厚さ方向に級数展開 (ベキ級数, Legendre 多項式, Chebyshev 多項式および Fourier 級数の4種類の展開) と行ない、面内・面外の相互作用がある場合とも含めて一般的な平板への適用性を考慮した理論を求めると共に、幾つかの代表例について三次元弾性論による厳密解との数値的比較を行なった結果について述べる。なお、従来までの代表的な研究成果として、変位と板厚方向にベキ級数展開したものに Mindlin (1951, 1955, 1956, 1961)⁽²⁾, Lo & others (1977, 1978)⁽³⁾ を挙げることができ、Legendre 展開で行なったものに Mindlin & Medrick (1959)⁽⁴⁾, Medrick & Pao (1965), Moon (1972, 1973)⁽⁵⁾, また Fourier cosine 展開で行なったものに Lee & Nirkodem (1972, 1974)⁽⁶⁾ 等を列挙することができ。

2. 二次元化平板理論の誘導.

断面の都合上、ベキ展開によるものと Fourier sine & cosine 展開によるもののみを述べよ。

(A) 変位のベキ級数展開

変位 u_j と x_2 に関してベキ展開:

$$u_j(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_2^n u_j^{(n)}(x_1, x_3, t).$$

し、線形弾性論の基礎関係式に上式と

代入し、一般化変分原理の式によって整理すると最終的に次式のような二次元化された運動方程式と境界条件式が求められる。

$$\tau_{\alpha j, \alpha}^{(n)} - n \tau_{2j}^{(n-1)} + F_j^{(n)} + f_j^{(n)} = \sum_{m=0}^{\infty} \rho^{(m, n)} \ddot{u}_j^{(m)}, \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (1)$$

$$\dot{f}_j^{(n)} = n \alpha \tau_{2j}^{(n)} \quad \text{or} \quad \dot{\bar{u}}_j^{(n)} = \dot{u}_j^{(n)} \quad \text{on } C \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{ij}^{(n)} &= \int_{-b}^b x_2^n \tau_{ij} dx_2, \quad F_j^{(n)} = [\tau_{2j}^{(n)} x_2]_{-b}^b, \quad f_j^{(n)} = \int_{-b}^b x_2^n f_j dx_2, \\ \dot{f}_j^{(n)} &= \int_{-b}^b x_2^n (n \alpha \tau_{2j})_t dx_2, \quad \rho^{(m, n)} = \int_{-b}^b x_2^{m+n} \rho dx_2. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

上式中の τ_{ij} : 応力テンソル, f_j : 物体力ベクトル, ρ : 密度を表わす。

いま一般化 Hooke の法則によって構成方程式と与えるものとすれば、

$$\left. \begin{aligned} \tau_{ij}^{(n)} &= \int_{-b}^b x_2^n C_{ijkl} E_{kl} dx_2 = \sum_{m=0}^{\infty} \{ C_{ij\alpha\beta}^{(m, n)} u_{\alpha, \beta}^{(m)} + (m+1) C_{ij2\beta}^{(m, n)} u_{\beta}^{(m+1)} \} \\ \Rightarrow \text{に、} \quad C_{ij\beta\alpha}^{(m, n)} &= \int_{-b}^b x_2^{m+n} C_{ij\beta\alpha} dx_2, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

この式を式(1)に代入整理すれば、変位係数 $u_{\alpha}^{(n)}$ に関する二次元化された平板の一般的な支配運動方程式が次式のように得られる。

$$\sum_{m=0}^{\infty} \{ C_{ij\beta\alpha}^{(m, n)} u_{\alpha, \beta}^{(m)} + (m+1) C_{ij2\beta}^{(m, n)} u_{\beta, \alpha}^{(m+1)} \} - n \sum_{m=0}^{\infty} \{ C_{2j\alpha\beta}^{(m, n)} u_{\alpha, \beta}^{(m)} + (m+1) C_{2j2\beta}^{(m, n)} u_{\beta}^{(m+1)} \} + F_j^{(n)} + f_j^{(n)} = \sum_{m=0}^{\infty} \rho^{(m, n)} \ddot{u}_j^{(m)} \quad (5)$$

以上の式でラテン添字は 1, 2, 3 と、ギリシア添字は 1, 3 とはさすものとする。

等方性板の場合は C_{ijkl} をして次の関係式を用いなければならない。

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (6)$$

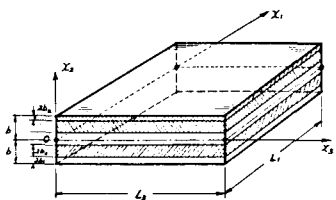


Figure 1. Geometry of laminated rectangular plate.

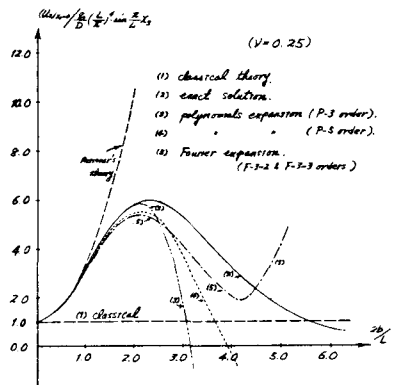


Figure 2. Midplane displacement $(u_6)_{x_2=0}$ for homogeneous isotropic plate.

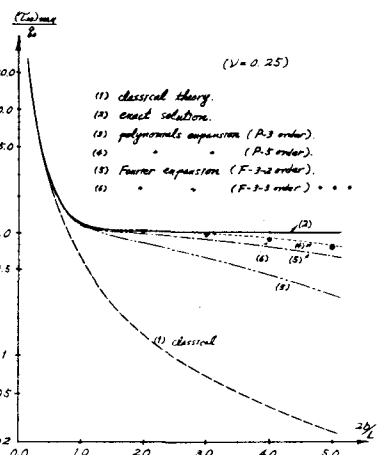


Figure 3. Maximum bending stress $(\tau_{11})_{\max}$ for homogeneous isotropic plate.

(B) 変位の Fourier cosine & sine 展開

$$U_j = \sum_{n=0}^{\infty} U_j^{(n)} \cos \frac{n\pi}{2} (1-\eta) + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{U}_j^{(n)} \sin \frac{n\pi}{2} (1-\eta) \dots (7)$$

== に、 $\eta = X_2/b$; $U_j^{(n)}$, $\hat{U}_j^{(n)}$ は共に X_1, X_3 および η の関数。

以下 (A) の場合と同様の操作により次式のような支配式がえられる。

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{U}_{j,a}^{(n)} - \frac{n\pi}{2b} \bar{U}_{j,j}^{(n)} + \frac{1}{b} (f_j^{(n)} + f_j^{(n)}) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \bar{\rho}^{(m,n)} \bar{U}_j^{(m)} + (1-\delta_{m0}) \bar{\rho}^{(m,n)} \hat{U}_j^{(m)} \right\} \\ \bar{U}_{j,a}^{(n)} + \frac{n\pi}{2b} \bar{U}_{j,j}^{(n)} + \frac{1}{b} f_j^{(n)} &= \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \bar{\rho}^{(m,n)} \bar{U}_j^{(m)} + (1-\delta_{m0}) \bar{\rho}^{(m,n)} \hat{U}_j^{(m)} \right\} \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{U}_j^{(n)} &= \int_0^1 \bar{U}_{j,j} \cos \frac{n\pi}{2} (1-\eta) d\eta, \quad \bar{U}_{j,j}^{(n)} = \int_0^1 \bar{U}_{j,j} \sin \frac{n\pi}{2} (1-\eta) d\eta \\ f_j^{(n)} &= [\bar{U}_{j,j} \cos \frac{n\pi}{2} (1-\eta)]_1', \quad f_j^{(n)} = b \int_0^1 f_j \cos \frac{n\pi}{2} (1-\eta) d\eta \\ \bar{\rho}^{(m,n)} &= \int_0^1 \bar{\rho} \cos \frac{n\pi}{2} (1-\eta) \cos \frac{m\pi}{2} (1-\eta) d\eta, \text{ etc. } \dots \end{aligned} \right\} \dots (9)$$

式(8)は構成方程式を通して変位係数 $U_j^{(n)}$, $\hat{U}_j^{(n)}$ のみで完結表示可能であるが、==では省略する。

3. 数値計算例

まず、無限長平板の上表面に $\bar{U}_{2,2}|_{x_2=b} = 8.0 \sin \frac{\pi X_1}{L}$ の正弦変位荷重が作用する場合の結果と厳密解との比として図示したものが Fig. 2 & Fig. 3 である。==では均質等方性 ($\nu=0.25$) とし $2b/L$ との関係を示した。図中の P-3 order とは $U_a^{(3)}$, $U_z^{(3)}$ までで、また P-5 order とは $U_a^{(5)}$, $U_z^{(5)}$ までを採用したことを意味し、また他方 F-3-2 order とは $U_a^{(3)}$, $U_z^{(3)}$, $\hat{U}_a^{(2)}$, $\hat{U}_z^{(2)}$ までで、F-3-3 order とは $U_a^{(3)}$, $U_z^{(3)}$, $\hat{U}_a^{(3)}$, $\hat{U}_z^{(3)}$ までをそれぞれ採用したことを意味している。結果は共に項数が増加するにつれて厳密解へ収束している。

次に、等厚の三層の異方性層状平板に前記と同じ表面外荷重が作用した場合の断面内の曲げ応力 σ_{23} の分布および面内変位 U_3 の分布と厳密解との比較を含めて図示した結果が Fig. 4 & Fig. 5 である。前例と同じような傾向が==でも指摘できる。

動的な問題の具体例として、無限に広がった等方性板の X_3 -方向に鋼和波動が伝播する場合の内部振動数 ω と波数 k との関係、中央面に沿い、対称モード (i.e. 曲げのモード) の場合に、最初から 5 次までのものによって図示し厳密解による結果と比較したものが Fig. 6 である。次数の低いものでは無次元化波数 k の図示の範囲に対して極めて精度の高い結果がえられてくる。次数が高くなるほど k の大きい領域で誤差が徐々に大きくなる傾向を示している。なお、図中には参考のために、Fourier cosine 展開 (F-3 order のもの) の結果も示されている。

4. 結 言

その他の計算例については学会当日に発表する。

5. 参考文献: 1) 平島・村松; 土木学会論文報告集, No.304 (1980), pp.33~46. 2) Mindlin, R.D.; J. Appl. Mech. (1951), pp.31~38; J. Appl. Phys. (1951), pp.316~323; Quart. Appl. Math., 19 (1961), pp.51~61. 3) Lo, K.H. & Others; J. Appl. Mech. (1977), pp.663~676. 4) Mindlin, R.D. & Medrick, H.A.; J. Appl. Mech. (1959), pp.561~569. 5) Moore, F.C., J. Comp. Math., 6 (1972), pp.62~79. 6) Lee, P.C.Y. & Nirkodem, Z.; Int. J. Solids Struct., 8 (1972), pp.581~612; 10 (1974), pp.177~196.

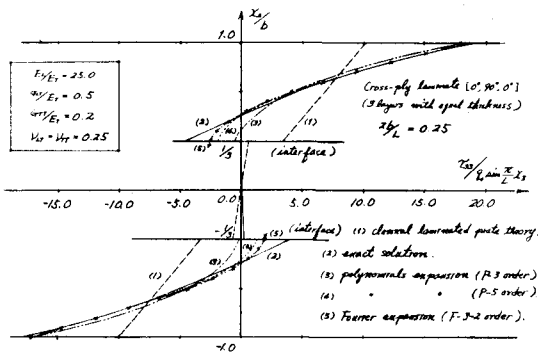


Figure 4. Distributions of bending stress σ_{23} for cross-ply laminated plate.

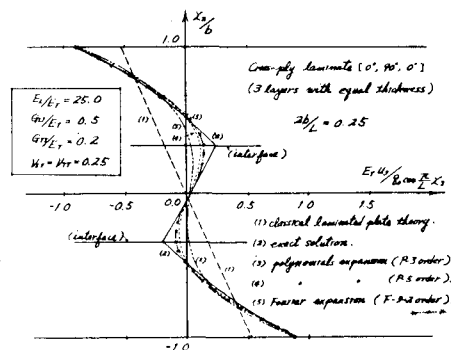


Figure 5. Distributions of in-plane displacement U_3 for cross-ply laminated plate.

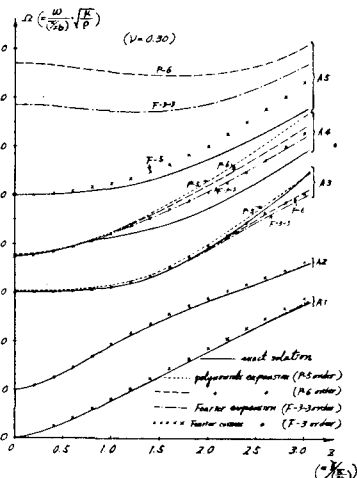


Figure 6. Antisymmetric frequency spectrum for homogeneous isotropic plate.