I-9　　隅角境界点の積分方程式法による取り扱いについて

福井大学工学部　正員　福井卓雄

1. はじめに

積分方程式法（または境界要素法）の長所のひとつは，比較的単純な近似によっても，かなり精度の高い近似解が得られることである。しかしながら，境界が隅角を有する場合には，隅角点の付近で解が十分に近似されないことがしばしばある。この原因は，隅角境界点の付近では積分方程式の核に特異性が生じ，そのために，Fredholmの定理が適用できなくなり，未知関数を連続な解として決められなくなるからである。このことは，積分方程式を数値近似する段階で一層重要な問題となる。境界が区分的になめらかであれば，積分方程式の解も広義には区分的に連続な解となる可能性がある。また，そのようなもので，隅角点付近の解を十分正確に表わすことも可能である。しかし，通常の近似法で用いるように，解として，例えば階段関数や区分線形関数のように有限の値しか取り得ない関数を仮定すれば，上記のように境界の一部で発散する解を十分に近似表現することは不可能である。これらのことは，扱う問題の種類，用いる特異解ならびに積分方程式，また境界条件などによって，問題となるなり方がいくらか異なるが，いずれにしても，何らかの方法で隅角点付近の解を改善してやることが必要である。これまでにいくつかの方法が提案されているが，いずれも，隅角境界付近での固有解を，本来の積分表現された解に重ね合せて近似解を表現する方法にもとづいている。この方法は良い近似解を与えるが，解の積分表現とは別の余分な項をつけ加えることになるので，煩雑な手続きを必要とする。ここでは，積分方程式法による解の隅角付近での性質に考察を加え，もっと単純な方法を用いても，実用上十分な精度の近似解が得られることを示す。

2. 隅角付近での解の特性

簡単のために，St. Venantのねじり問題について考察を進める。応力関数Ψについて，与えられた領域Bとその境界∂Bにおいて（簡単のため，領域は単連結とする）

$$\nabla^2\Psi = -2G\gamma \quad \text{in } B \qquad (G：せん断弾性係数，\gamma：ねじり率) \tag{1}$$
$$\Psi = 0 \quad \text{on } \partial B$$

が成立しなければならない。問題を支配するのはLaplace作用素∇^2であるから，$\nabla^2\phi = 0$となる解ϕのみを考えることにすると，上の境界条件を満足する，開角αの隅角部付近での解は，

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{\frac{n\pi}{\alpha}} \sin\frac{n\pi\theta}{\alpha}, \qquad 0 \leq \theta \leq \alpha \quad (\phi = 0 \text{ on } \partial B) \tag{2}$$

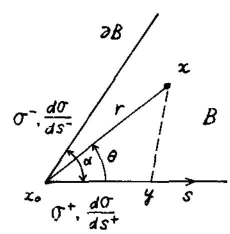

図.1

となる（図.1）。すなわち，$\phi \sim r^\beta$であり，$n=1$として，$\alpha > \pi$のとき$\frac{1}{2}<\beta<1$，$\alpha \leq \pi$のとき$\beta \geq 1$となる。結局，$\alpha \leq \pi$のときには，隅角付近で解はその勾配も含めてなめらかであり，$\alpha > \pi$のときには，隅角付近で勾配が無限大に近づく。

3. 隅角付近での積分方程式法による近似解の特性

いま，応力関数の解の形を境界上に分布する密度$\sigma(y)$による一重層ポテンシャルで，

$$\Psi(x) = -\frac{1}{2}G\gamma|x|^2 + \phi(x), \qquad \phi(x) = \int_{\partial B} \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{|x-y|}\cdot\sigma(y)\,ds_y \tag{3}$$

と表わす。第一項の特解には問題はない。第二項の開角αの隅角付近での挙動について見てみよう。まず，密度$\sigma(y)$を隅角付近でTaylor展開して，

$$\sigma(y) = \sigma^{\pm}(x_0) + (s(y) - s(x_0))\frac{d\sigma}{ds^{\pm}} + \cdots \tag{4}$$

とし，それぞれの項の密度に対応する一重層ポテンシャルは

$$\phi(x) = \phi_0(x) + \phi_1(x) + \cdots \qquad (5)$$

とする。ここに、ϕ_0, ϕ_1 は、隅角部の特異性に関する項だけについて整理すると、(図.1)。

$$\phi_0(x) = -\frac{1}{2\pi} r(\log r - 1)[\sigma^- \cos(\alpha-\theta) + \sigma^+ \cos\theta] + \varepsilon(r), \quad \varepsilon(r) \sim r$$
$$\phi_1(x) = -\frac{1}{4\pi} r^2 \log r \left[\frac{d\sigma}{ds^-}\cos 2(\alpha-\theta) + \frac{d\sigma}{ds^+}\cos 2\theta\right] + \varepsilon(r^2), \quad \varepsilon(r^2) \sim r^2 \qquad (5a)$$

となる。一重層ポテンシャルによる隅角部の特異性は、ϕ の勾配が無限大になる程度のものであって、それは隅角部における密度の値によって決まる。特異性が消えるのは、$\sigma^+ = \sigma^- = 0$、または、$\sigma^+ = \sigma^-$ かつ $\alpha = \pi$ のときだけである。

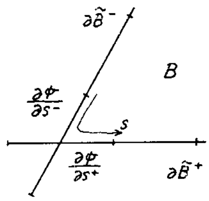

図.2

4. 隅角部での近似法に関する一考察

2と3の結果をふまえて、隅角部での密度の近似法を考えてみる。基本的な方針は、「隅角部での実際の解の性質に似た性質をもつように式(3)の表現を選ぶこと。」である。ここでは、最も単純な発想にもとづく、一つの方法を検討してみる。方針は次のとおりである。

(1) $\alpha > \pi$ のときには何も手を加えない。すなわち、$r\log r$ と $r^\beta (0<\beta<1)$ とは、勾配の連続性という観点からは、本来似たような性質をもつのであるから、そのままでも解は十分に近似されるであろう。

(2) $\alpha < \pi$ のときには、ϕ_0 の特異性を回避するように、隅角部での密度分布を領域外に少し延長させて、隅角点で特異性が生じないようにする。(図-2)。この場合には、各隅角点ごとに未知数が増加するから、新しい条件をつけ加えてやる。ここでは

$$\frac{\partial\phi}{\partial s^-} + \frac{\partial\phi}{\partial s^+} = 0 \qquad (6)$$

とした。

5. 解析例と考察

解析例では、密度を境界上で区分的線形関数として近似した。図.3に、$\alpha > \pi$ のときの隅角付近の近似解の例を示す。式(3)の表現で、$\phi \sim r^\beta$ とすると、β はほぼ正解に近い値を示している。実用上はこの程度の近似解で十分であろう。図.4は、$\alpha < \pi$ のときの解析例である。境界の分割数は18(4の方法を用いる場合、未知数は3個ふえて21となる)であるが、何も手を加えない場合(●,▲)と比べて、4で述べた方法(○,△)の効果は明らかであろう。

同様の方法の平面弾性問題や平板の曲げ問題への適用、各種の特異境界点の取り扱い等については当日発表する。

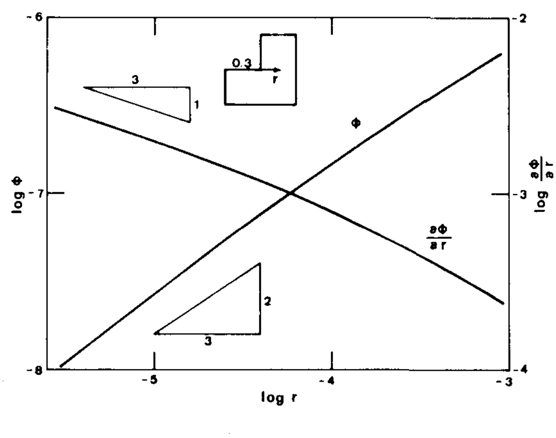

図.3

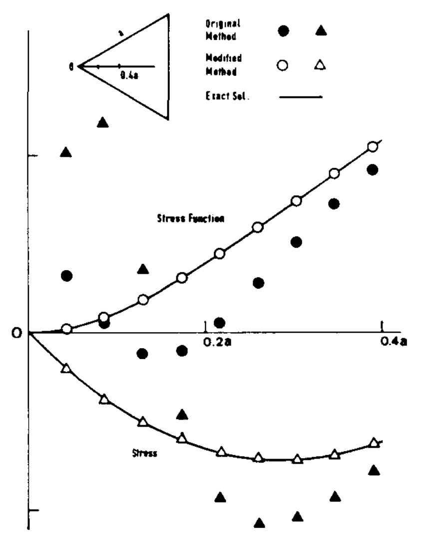

図.4