

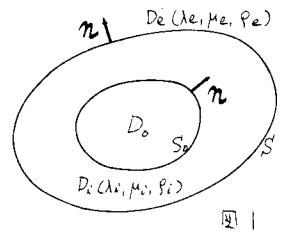
京都大学工学部 正員 西村直志  
 京都大学工学部 正員 小林昭一

1 序

積分方程式法を用いて非定常弾性解析を行なう場合、積分変換型定式化<sup>1)</sup>によるものと、Retarded Potential 型の定式化によるもの<sup>2)</sup>がある。本報は前者を採り、従来得られていた解析精度を改善する事を目的とする。

2 定式化

本報では、図1に示す様な非均一物体に関する外部問題を扱う。諸量に時間方向に  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dt$  型 Fourier 変換をほどこせば、問題は  $e^{i\omega t}$  型の定常問題になる。今、変位の F 変換を



$$\begin{aligned}
 u &= \int_S T_e u \, dS - \int_S U_e t \, dS + u_I & \text{in } D_e \\
 u &= \int_S U_i t \, dS - \int_S T_i u \, dS + \int_{S_0} T_i v \, dS \\
 &\quad - \int_{S_0} U_i t \, dS & \text{in } D_i \quad \text{①}
 \end{aligned}$$

と表示する。ここに  $U_e(u)$ ,  $T_e(t)$  は  $D_e(u)$  の一重層、二重層の核、 $u$ ,  $t$  ( $v$ ,  $s$ ) は  $S$  ( $S_0$ ) 上の変位、表面力の F 変換、 $u_I$  は入射波の F 変換である。なお、簡単のために「静止した過去」の仮定をした。式①から通常の方法で積分方程式が得られ、適当に離散化を行えば問題を解く事ができる。

この場合、 $D_e$  の補集合の形状を有し、外部の物性値を有する物体、及び  $D_0$  の形状を有し、内部の物性値を有する物体の変位境界値問題の固有値  $\omega$  に於いて見かけ上の固有値現象が生じ<sup>3)</sup>、得られた積分方程式の解の一意性が成立しなくなる。それに応じて得られる数値解も精度が悪くなるので注意せねばならない。

パラメータ  $\omega$  を与えて式①により  $u$  を求め、逆変換を行えば非定常解が求まる。数値 F 変換には、F とえは FFT 法を用いればよい。見かけ上の固有値  $\omega$  近辺での解析は、補間法を用いて回避すればよい。

3 数値解析上の問題点及び数値例

上記の手法の実行に当たっての問題点、及び対策を述べ、数値例を示す。

i) 基本解のけた落について：上記 U, T の計算に於いて、 $\omega$  が小さい場合にはけた落が生ずる。たとえば、2次元問題の場合、

$$U(z, y) = \frac{i}{4\pi} \left[ 1 H_0^{(1)}(k_{rL}) + \frac{\partial \nabla}{\partial r^2} (H_0^{(1)}(k_{rL}) - H_0^{(1)}(k_{rR})) \right] \quad r=|z-y|, \quad k_{rL}: \text{波数} \quad \text{②}$$

の ( ) 内の項の形からも予想される。これは、たとえば  $k_{rL} < 1$  の場合は  $H_0^{(1)}$  を級数展開して、特異性の高い項を消去する事で防止できる。S/S 等の標準的プログラムによる Bessel 関数の計算は避けるべきである。

ii) 特異積分の評価：高次近似を用いた解析では、数値積分の使用が不可欠である。二重層ポテンシアルから生ずる特異積分は、内部問題、外部問題に応じて、各々

$$C^e u_p = \int_{\partial D} U t_p \, dS - \int_{\partial D} T u_p \, dS, \quad -C^i u_p = \int_{\partial D} T u_p \, dS - \int_{\partial D} U t_p \, dS + u_p \quad \text{③}$$

を用いて評価できる。ここに  $u_p$  は平面波、 $t_p$  は対応する traction、 $C^{e(i)}$  は二重層ポテンシアルの外(内)部極

限の Free Term である。

iii) 見かけ上の固有値の検出：応力境界値問題の場合、係数行列を

$$\begin{matrix}
 x_i \in S \\
 x_R \in S_0 \\
 x_m \in S
 \end{matrix}
 \begin{pmatrix}
 \int_S T_{cc}(x_i, y) \Omega_j(y) dS & 0 \\
 -\int_S T_i(x_R, y) \Omega_j(y) dS & \int_S T_i(x_R, y) \Omega_L(y) dS \\
 -\int_S T_i(x_m, y) \Omega_j(y) dS & \int_{S_0} T_i(x_m, y) \Omega_L(y) dS
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 -\int_S U_c(x_i, y) \Omega_n(y) dS \\
 \int_S U_i(x_R, y) \Omega_n(y) dS \\
 \int_S U_i(x_m, y) \Omega_n(y) dS
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 U(x_i) \\
 V(x_R) \\
 t(x_m)
 \end{pmatrix}
 \quad (4)$$

( $\Omega$  : 形状関数)

の型に並べる。四角で囲んだ部分の LU 分解 (全体の行列の LU 分解の途中で求まる) を求め、Gout 法であれば L の対角項の絶対値の最小値に注目する。この値が急に小さくなる  $\omega$  が見かけ上の固有値に対応する

iv) 境界応力：アイソパラメトリック要素を用いた要素のパラメータを局所座標とみて微分すれば求まる。

以上の諸点に注意して、2次元アイソパラメトリック要素を用いた解析例を以下に示す。図2は定常P波に対する円孔上の点での応力であり、 $P_{a0}$ の解とよく一致する。図3は円孔にステップ状S波が入射した時の円孔上の点での応力応答であり、藤木の求めたLoveの公式による解とよく一致する。図4は、応用としてトンネルのS波応答を求めたものである (Young率比:ライニング/岩=5, Poisson比:ライニング $1/6$ , 岩 $1/4$ , 等密度)。

参考文献 1) 東, 京大工学修士論文, 1975, 2) 小林, 西村

56年関西支部講義集, 3) 藤木, 京大工学修士論文, 1980.

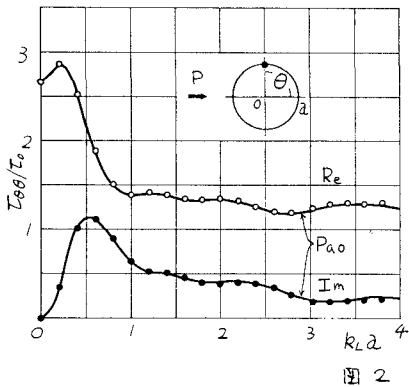


図 2

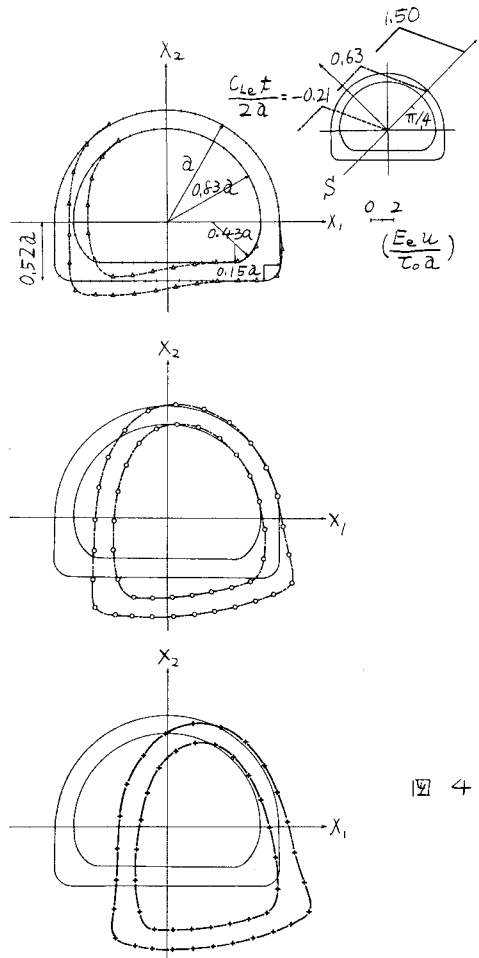


図 4

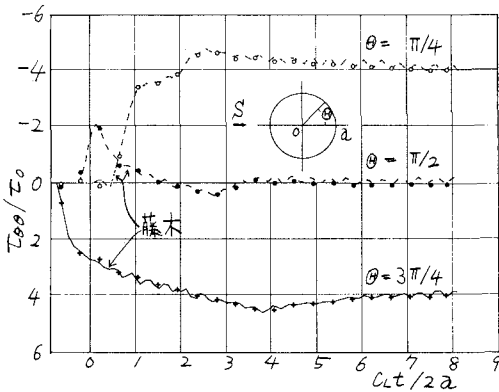


図 3