I-6　剛性行列の新たな帯幅減少法の提案

岡山大学工学部　正員　谷口健男

1. まえがき

有限要素法や差分法といったマトリックス解析法においてあらわれる多元連立一次方程式の有効な解法の1つとして帯行列法を挙げることができる。この数値計算法は係数行列の主対角に添う帯状領域だけを入力データとして扱い、元の連立一次方程式の解を得ようとするものであり、その為、全ての非零要素をこの領域に納め、さらに、その帯幅も小さくする必要がある。この目的のため、従来より様々な帯幅減少法が提案され、実用に供されているが、そのなかでも Cuthill-Mckee Algorithm[1] と Gibbs-Poole-Stockmeyer Algorithm[2] が最も良く利用されている。一方、文献3)においては、従来の方法とは全く異なる新たな帯幅減少法が提案されている。この方法の特徴は、系の長手軸を求めることなく、系の帯幅を直接求めている点にあり、この研究より、従来の全ての方法は、帯幅を階段状にしか求められないことが明らかとなった。本研究においては、文献3)の手法に改良を加え、演算時間を 1/2 ～ 1/3 に短縮しうる新たな帯幅減少法を提案する。

2. 最小帯幅問題

まえられた連立一次方程式を

$$y = A \cdot x \tag{1}$$

とする。行列Aのi行の最終非零要素の列番号を j とすれば、Aの半帯幅 HBW は下式で与えられる。

$$HBW = \max_{i=1}^{n} (j - i) \tag{2}$$

A(n×n) は多くの零要素を含み、対称 $(a_{ij} = a_{ji})$ と仮定する。このAに対し、1～nの番号を付けたn個の点 v_i $(i=1,2,\cdots,n)$ を準備し、Aの上三角行列内の全ての要素 a_{ij} $(j>i)$ に対し「もし $a_{ij} \neq 0$ ならば v_i と v_j を線で結ぶ」操作を行えば、行列Aより グラフ G(n) を得る。このグラフにおいて(2)式は下式となる。

$$HBW = \max_{v_j \in adj\, v_i} (j - i) \tag{3}$$

ここで $v_j \in adj\, v_i$ は v_j 点が v_i 点と線が結ばれていることを示す。(3)式より帯幅値は グラフの点への番号の付け方に依存することがわかる。(2)，(3)式を用いてHBWを最小化しようとすれば、まず番号を与え、ついで その差の最大値を見い出すという操作を繰り返さねばならない。

いま図-1に示すような座標系の中に、このグラフを次の2条件を満たすように画く。条件1). グラフの節点は座標の格子点に配置し、縦に配置された点列には空点が存在しないようにする。条件2). グラフの線は 同一、もくしは相隣る縦点列内に位置する2点間のみを結び、その方向は図-1aに示されるう向だけ許される。この条件を満たすように画かれた図形に対し、最右側縦点列内最上点より下方へ、ついで次2縦点列最上点へと順次 1, 2, 3, ⋯, n と番号を付ける。図-2に1例を示す。このようにして得られた図形の HBW は、

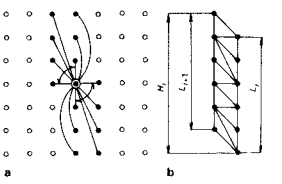

図-1. 点，線の再配置法

$$HBW = \max_{i=1}^{N-1} H_i \tag{4}$$

ここで H_i は図1-bのとおりであり、Nは縦点列数。(4)式より、HBWは図形の幅に支配されることがわかる。従って、帯幅を減少させるには図形の突出部をなだらかにする必要があり、HBWを最小化しうる状態の図形は一般に 一様な巾を有すると考えられ、このことより、(4)式は近似的に (5)

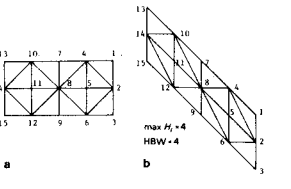

図-2. 帯幅減少法の1例

式に置き換えられることになる。(L_iは図-1b参照)

$$HBW = \min_{i=1}^{\alpha} L_i \qquad (5)$$

3. 帯幅減少法の改良

(4), (5)式より、minHBW は図形の最大幅により決定されることが示された。従って、Gの中のどの部分が最大幅を規定するかを見い出す方法が即ち帯幅最小化法となる。ここで新たな定義を行う。Gの中の任意の1点u_0よりなる集合をl_0とする。このl_0に隣接する点$\{u_1 | u_1 \in adj.u_0\}$の集合を$l_1$、更に$l_1$に隣接する点集合を$l_2$、……とすると、Gの全ての点は$\{l_0, l_1, l_2, \cdots, l_\alpha\}$に分類される。この$\{l_i\}$をレベル・セットと呼ぶ。

文献1), 2)等の従来の手法は、Gの1端点よりレベルセットを作成し、max 幅を最小にさせるようにくり返しレベルセットを作るという方法である。一方、文献3)は(5)式に示される max L_i を直接求める方法であることより、レベルセットを作り直す必要はない。この方法の概略を図-2のFlow-chartに示す。即ち、Gの境界上の点よりレベルセット$g(1)$を作り、その最終レベルセット内の1点(u_1)より再度逆方向にレベルセットを作り、それが境界上の点に達したとする。この境界上の2点u_2, u_3を適切に選び、u_2, u_1, u_3を結ぶ最短パスを求めれば、これがGの max L_i となる。いまこれをL_cとし、L_cより左、右にレベルセットを求め、両端部より順次番号を与えれば、番号付けは完了することになる。

このアルゴリズムで最も手順の必要とするのが、レベルセットの作る回数であることは云うまでもない。文献3)では、例えばl_{i-1}よりl_iを作るときl_{i-1}に含まれる全ての点よりそれに隣接する点を探し出すという方法がとられている。しかしながら、図-4よりも明らかなように、1点とび、もしくは2点とびで全ての必要な点を探し出すことが可能である。これによれば、レベルセット作成の演算回数は1/2～1/3程度と押えられることになる。

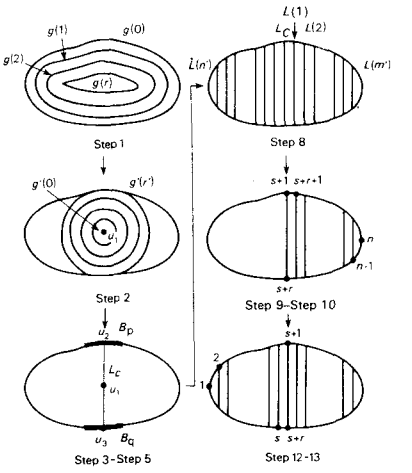

図-3. 文献3)のアルゴリズム

今回のテストケースに対して、この修正をしたアルゴリズム、文献3)のアルゴリズム、および Cuthill-Mckee Algorithm を適用した結果をまとめたのが表-1である。なお、C-M法については、出発点選定の為のパラメータ N, M を変えて結果を求めている。この表より次のような結論が導かれる。

1). 今回の改良法は、従来最も早い方法として知られているC-M法($N=0$)と同じ演算時間しか要求しない。

2). 今回の改良法は、文献3)とほぼ同程度のHBWをもたらす。

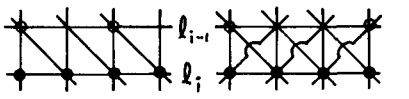

図-4. 新しい Level Set の作り方

4. おわりに

本研究で示した方法は、今日存在する帯幅減少法のうちの最も早い、しかも結果の良い方法の1つと云える。なお、本研究で示した改良法のIdeaは英国 Harwell, AERE, J.K.Reid博士のSuggestionに依るものであり、ここに感謝の意を表したい。また、上記数値実験に際し御助力を戴いた川田工業 木本輝幸氏にも感謝致します。

テスト例 ＼ 方法		今回の方法	文献3)	C-M N=0	C-M N=1, M=2
Ex.1 (42点)	HBW	9	9	10	9
	Time	0.01	0.02	0.01	0.35
Ex.2 (99点)	HBW	12	11	16	13
	Time	0.02	0.04	0.02	3.71
Ex.3 (136点)	HBW	18		17	16
	Time	0.03		0.04	5.83
Ex.4 (193点)	HBW	22	20	25	21
	Time	0.05	0.12	0.06	44.83

表-1. 比較表

HBW: 半帯幅値, Time: 単位 sec.

[参考文献]

1). E.Cuthill & J.Mckee, ACM National Conference, 1969, pp. 157 – 172

2). N.E.Gibbs et al, SIAM J. of Numer. Anal, 1976, pp. 236 – 250

3). 白石成人, 谷口健男, 土木学会論文集, 314号 (1981.10発行予定)