

大阪大学 学生員 ○坂本 保彦
大阪大学 正員 小松 定夫
川崎重工(株) 正員 長井 正嗣

1. まえがき

領域型の問題に対して 領域内の解を用いて 境界物理量のみで解析しようとする手法として 境界要素法がある。境界要素法は 境界条件と近似的に満足して解析しようとする手法であるために 境界分割, 境界物理量および境界形状の近似度により解の精度が左右されることが予想される。そして 同じ境界分割数でも, 境界要素内で境界未知量を一定として近似した場合と, 線形近似を用いた場合では 前者の場合の精度が劣ることは 過去の研究により指摘されてきた。以上のような考えから, 境界未知量および境界形状に高次関数を導入し, その近似度を高めれば 精度の向上が期待できると考えられる。しかしながら, 高次関数を用いた場合, 精度の向上と同時に 固有の問題点も生じる。本文では 高次関数を用いた場合の問題点を指摘し, 次にその改良法を示し, 数値計算例により, その妥当性を示し, 高次境界要素の有用性について言及する。

2. 基礎理論

境界要素法の基礎式は以下のように与えられる。

$$C_{ij} u_j + \int_S P_{ij}^* u_j ds = \int_S u_j P_{ij} ds \quad \text{----- (1)}$$

ここで C_{ij} : 特異積分に関する係数, u_j : 変位, P_{ij} : 表面力, P_{ij}^* , u_j^* : 基本解 (Kelvin 解) である。また $\int_S ds$ は表面積分を意味する。

今, 容積力を無視して 議論をする。二次元問題において 変位, 表面力 および基本解は 以下のようによえられる。

$$\mathbf{U} = \{u_1, u_2\}^T, \quad \mathbf{P} = \{P_1, P_2\}^T \quad \text{----- (2) a, b}$$

$$\mathbf{U}^* = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^* = \begin{bmatrix} P_{11}^* & P_{12}^* \\ P_{21}^* & P_{22}^* \end{bmatrix} \quad \text{----- (3) a, b}$$

また $P_{ij}^*(u_k^*)$ は 点 i に j 方向の単位力が作用した際の観測点 k における i 方向の力 (変位) である。

(2), (3) 式を (1) 式に代入すると

$$\mathbf{C}\mathbf{U} + \int_S \mathbf{P}^* \mathbf{U} ds = \int_S \mathbf{U}^* \mathbf{P} ds \quad \text{----- (4)}$$

である。さて 今, 境界を N つの領域に分割し, 節点変位 $\mathbf{U}^n$ および節点応力ベクトル $\mathbf{P}^n$ を用いて,

$$\mathbf{U} = \Phi \mathbf{U}^n, \quad \mathbf{P} = \Psi \mathbf{P}^n \quad \text{----- (5) a, b}$$

と定義する。ここで Φ, Ψ : 補間関数である。(5) 式を (4) 式に代入すると

$$\mathbf{C}^n \mathbf{U}^n + \sum_j \left\{ \int_{S_j} \mathbf{P}^* \Phi ds \right\} \mathbf{U}^n = \sum_j \left\{ \int_{S_j} \mathbf{U}^* \Psi ds \right\} \mathbf{P}^n \quad \text{----- (6)}$$

(6) 式を得る。高次要素, 特に二次元要素 (Quadratic Element) の場合, 補間関数は 次のように与えられる。

$$\Phi^T \text{ or } \Psi^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\xi(\xi-1) & \frac{1}{2}\xi(\xi+1) & 1-\xi^2 \\ \frac{1}{2}\eta(\eta-1) & \frac{1}{2}\eta(\eta+1) & 1-\eta^2 \end{bmatrix} \quad \text{----- (6)}$$

(6) 式を すべての節点にわたって求め, 最終的に以下の式を得る。

$$\mathbf{AU} = \mathbf{BP} \quad \text{----- (7)}$$

3. 高次要素固有の問題点とその処理

高次要素を用いた場合, 以下のような問題点が生じる。

① 節点において特異積分に関する係数 C_{ij} を解析的に評価するが難しい。

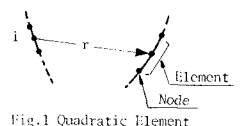


Fig.1 Quadratic Element

- ② 応力の不連続点において 応力ベクトルが一意的に定まらない。
- ③ 境界形状を高次関数を用いて近似すると、表面積分の定積分解析が困難となり、数値積分を用いるしかない。そのため、境界近傍の内部応力および内部変位を精度良く求めるための工夫を要する。

以上のような問題点に対して その処理方法を示す。

- (1) C_j の評価; (4) 式において $\epsilon U = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S-\epsilon} P^* U dS$ である。今、表面力のない場合を考えると $P=0$ より

$$\epsilon U + \int_{S-\epsilon} P^* U dS = 0 \quad (8)$$

次に剛体変位 $\bar{U}$ を与えると $(\epsilon + \int_{S-\epsilon} P^* U dS) \bar{U} = 0$ より、 ϵ を以下の様に得る。

$$\epsilon = - \int_{S-\epsilon} P^* dS \quad (9)$$

- (2) 応力の不連続点の処理; 図2に示すような場合を考える。(7) 式において

応力の不連続点において 応力ベクトルを分離して考える。

$$AU = \left[\begin{array}{c|c|c} P_{i(t)} & P_{i(t)} & \\ \hline B_{i(-)} & B_{i(t)} & \\ \hline \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} P_{i(-)} \\ P_{i(t)} \\ P_{i(+)} \end{array} \right] \quad (10)$$

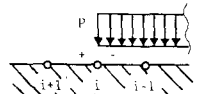


Fig.2 Discontinuity of Stress Vector

- (3) 内部力学量の評価; 定積分を用いた場合に比して、数値積分を用いて境界積分を評価すると、内部変位および内部応力は 境界近傍で精度良い解が得られない。これは 境界近傍において特異積分が精度良く評価されていないためと考えられる。それ故に (1) で用いた特異積分の評価法を 内部応力、内部変位に対しても用いる。すなわち、内部変位および内部応力を以下に示す式を用いて評価すれば良いと考えられる。

$$U_i = \epsilon^{-1} \left\{ \int_S U^* P dS - \int_S P^* U dS \right\} \quad (11)$$

$$U_{i,k} = \epsilon^{-1} \left\{ \int_S P_{i,k}^* U dS + \int_S U_{i,k}^* P dS - \int_S P_{i,k}^* U dS \right\} \quad (12)$$

ここで $k = \frac{1}{R}$, U_i ; 内部変位である。

4. 数値計算例

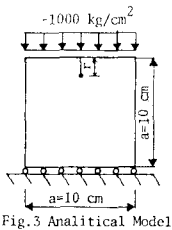


Fig.3 Analytical Model

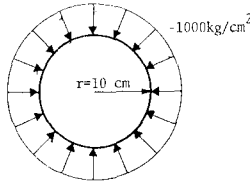


Fig.4 Circular Plate Model submitted to uniform pressure

Table 1 r/a within Error 3% of Normal stress parallel to y axis

Points of Gauss quad.	Eq. 1	r/a (Eq. 12)
4	0.91	(0.930)
6	0.95	(0.960)
8	0.96	(0.980)
12	0.97	(0.990)
16	0.98	(0.992)

(16 Elements)

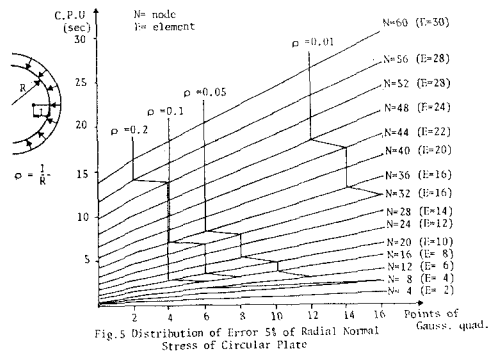


Fig.5 Distribution of Error 5% of Radial Normal Stress of Circular Plate

5. まとめ

以上の数値計算例から得られ結果として の内部応力等に関しては 3に述べた式を用いれず 解の精度は かなり改善される。 上記以外の実験的ないくつかの数値計算例の結果については、講演会当日に発表する予定である。