I-3　　境界要素法による熱媒体の２次元弾塑性解析

九州大学　工学部　学生員　○宇田川洋行
九州大学　工学部　正　員　　太田　俊昭
福岡大学　工学部　正　員　　黒木　健実

１．まえがき

境界要素法（ＢＥＭ）は有限要素法や差分法に比べ、一般に未知数を減らすことができるので、多元の連立方程式に帰着させる非線形問題にも有効である。そこで本報では、このような非線形問題に適用する場合の第１段階として比較的低い熱伝導下の弾性および弾塑性問題の定式化を行い、不連続な温度場や無限領域等における数値計算上の問題を検討し、一応の結果がえられたので、その一端を報告する。

２．基礎方程式

熱媒体としての材料は、(i)等方均質　(ii)熱流束 q は Fourier の法則に従う　(iii)各係数は温度Tに依存しないと仮定する。このとき温度Tに関する式は内部熱源のない場合、次のように表わされる。

$$\frac{\partial q_i}{\partial x_i}=0 \qquad in\ \Omega \qquad ただし \quad q_i=-D\frac{\partial T}{\partial x_i} \tag{1}$$

ここで、Dは熱伝導率、n_i は境界 Γ 上の外向き法線の方向余弦である。

一方、初期応力 σ^0_{ij} を考慮した微小変位弾性問題では、釣合い方程式、応力ーひずみ関係式、ひずみー変位関係式は、それぞれ次のように表わされる。

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}=0 \tag{2}$$

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right\} \tag{3}$$

$$\sigma^0_{ij}=\lambda\cdot\delta_{ij}\cdot\varepsilon_{\ell\ell}+2\cdot\mu\cdot\varepsilon_{ij}+\sigma^0_{ij} \qquad in\ \Omega \tag{4}$$

熱弾性問題においては、初期応力 σ^0_{ij} が次のように表わされる。

$$\sigma^0_{ij}=-\beta\cdot\delta_{ij}\cdot\varepsilon^0_{ij}$$

ここで、$\beta=3\lambda+2\mu$、$\varepsilon^0_{ij}=\alpha\Delta T$、$\delta_{ij}$ = Kronecker の Delta、$\lambda=\dfrac{2\cdot G\cdot\nu}{1-2\nu}$、$\mu=G$

G = せん断弾性係数、ν = Poisson 比、α = 線膨張係数、E = Young 率

以上の式を用いて重みつき残差法により次の積分方程式が導かれる。

$$\int_\Omega\left(\frac{\partial q^*_i}{\partial x_i}T-\frac{\partial q_i}{\partial x_i}T^*\right)d\Omega=\int_\Gamma\left(q^*T-qT^*\right)d\Gamma \tag{5}$$

$$\int_\Omega\left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}u^k_i-\frac{\partial \sigma^k_{ij}}{\partial x_i}u_i\right)d\Omega=\int_\Gamma\left(\sigma_{ij}\cdot n_j\cdot u^k_i-\sigma^k_{ij}\cdot n_j\cdot u_i\right)d\Gamma-\int_\Omega\sigma^0_{ij}\cdot\varepsilon^k_{ij}\,d\Omega \tag{6}$$

式(5)は温度場に対する積分方程式であり、T^* は $-D\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial T^*}{\partial x_i}\right)=\delta(Q-P)$ の基本解である。

また、q^* は $q^*=-D\frac{\partial T^*}{\partial x_i}$ で定義する。ここで、$\delta(Q-P)$ は Dirac の delta 関数である。式(6)は熱弾性問題に対する積分方程式であり、u^k_i は $\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_j}+\delta(Q-P)\cdot\delta_{ik}=0$ の基本解である。これから σ^k_{ij}、ε^k_{ij} を求めることができる。これらの基本解は、文献(1)に示されている。

以上が弾性体に対する熱応力問題の定式化であるが、次にこれを塑性領域にまで拡張することを考える。応力、ひずみの増分を $\dot\sigma_{ij}$、$\dot\varepsilon_{ij}$ とし、全ひずみ増分 $\dot\varepsilon_{ij}$ を Hooke の法則に従う弾性ひずみ増分 $\dot\varepsilon^e_{ij}$ と塑性ひずみ増分 $\dot\varepsilon^p_{ij}$ との和で表わせば

$$\dot\varepsilon_{ij}=\dot\varepsilon^e_{ij}+\dot\varepsilon^p_{ij} \tag{7}$$

材料を等方性とすれば、弾性ひずみ増分と応力増分との関係は次式のようになる。

$$\dot\sigma_{ij}=\lambda\cdot\delta_{ij}\cdot\dot\varepsilon^e_{\ell\ell}+2\cdot\mu\cdot\dot\varepsilon^e_{ij} \tag{8}$$

一方、部分積分を使えば次の式が成り立つ。

$$\int_\Omega \frac{\partial \dot{\sigma}_{ij}}{\partial x_j}\, d\Omega = \int_\Gamma \dot{\sigma}_{ij}\cdot n_j \cdot u_i^k\, d\Gamma - \int_\Omega \dot{\sigma}_{ij}\cdot \varepsilon_{ij}^k\, d\Omega \tag{9}$$

$$\int_\Omega \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\dot{u}_i\, d\Omega = \int_\Gamma \sigma_{ij}^k\cdot n_j\cdot \dot{u}_i\, d\Gamma - \int_\Omega \sigma_{ij}^k\cdot \dot{\varepsilon}_{ij}\, d\Omega \tag{10}$$

そこで、式(9)(10)を結びつけるために、式(8)を用いて

$$\dot{\sigma}_{ij}\cdot\varepsilon_{ij}^k = \sigma_{ij}^k\cdot\dot{\varepsilon}_{ij} \qquad \text{ただし}\quad \sigma_{ij}^k = \lambda\cdot\delta_{ij}\cdot\varepsilon_{ll}^k + 2\cdot\mu\cdot\varepsilon_{ij}^k \tag{11}$$

を導き、これと式(7)より $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$ を消去すれば次式がえられる。

$$\dot{\sigma}_{ij}\cdot\varepsilon_{ij}^k = \sigma_{ij}^k\cdot\dot{\varepsilon}_{ij} - \sigma_{ij}^k\cdot\dot{\varepsilon}_{ij}^p \tag{12}$$

よって、式(9)(10)(12)より式(6)と同じような形の式(13)がえられる。

$$\int_\Omega\left(\frac{\partial\dot{\sigma}_{ij}}{\partial x_j}\cdot u_i^k - \frac{\partial\sigma_{ij}^k}{\partial x_j}\cdot\dot{u}_i\right)d\Omega = \int_\Gamma\left(\dot{\sigma}_{ij}\cdot n_j\cdot u_i^k - \sigma_{ij}^k\cdot n_j\cdot\dot{u}_i\right)d\Gamma + \int_\Omega \dot{\sigma}_{ij}^p\cdot\varepsilon_{ij}^k\, d\Omega \tag{13}$$

ただし $\dot{\sigma}_{ij}^p = \lambda\cdot\delta_{ij}\cdot\dot{\varepsilon}_{ij}^p + 2\cdot\mu\cdot\dot{\varepsilon}_{ij}^p$

3. 離散化による境界要素近似

境界Γを近似的に N_Γ 個の線分に分割し、第Q番目の線分を Γ_Q で表わす。各線分の中点を節点に選び、各element上で一定であるような形状関数を用いて温度T、変位 u_j、表面力 P_j を補間する。また領域Ωでは、N_Ω 個の三角形要素に分割し、第e番目の要素を Ωe で表わし、各 Ωe の三辺の中点を節点に選び、各三角形要素上で一定であるような補間関数を用いる。

温度に関する積分方程式を離散化すると次式のようになる。

$$\gamma T(P) - \sum_{Q=1}^{N_\Gamma} T(Q)\int_{\Gamma_Q} q^*\, d\Gamma = -\sum_{Q=1}^{N_\Gamma} q(Q)\int_{\Gamma_Q} T^*\, d\Gamma \tag{14}$$

変位と表面力に関する積分方程式を離散化すると次式のようになる。

$$\gamma u_k(P) + \sum_{Q=1}^{N_\Gamma} u_j(Q)\int_{\Gamma_Q} P_j^k(P,Q)\, d\Gamma = \sum_{Q=1}^{N_\Gamma} P_j(Q)\int_{\Gamma_Q} u_j^k(P,Q)\, d\Gamma - \sum_{e=1}^{N_\Omega}\int_{\Omega e}\sigma_{ij}^o\cdot\varepsilon_{ij}^k\, d\Omega \tag{15}$$

ただし、PがΩの内点ならばγ = 1、滑らかなΓ上の点ならばγ = ½となる。

式(15)を式(3)へ代入すれば、ひずみ ε_{kl} は次式で求められる。

$$\begin{aligned}\varepsilon_{kl}(P) = &\sum_{Q=1}^{N_\Gamma} P_i(Q)\int_{\Gamma_Q} C_{ikl}\, d\Gamma - \sum_{Q=1}^{N_\Gamma} u_i(Q)\int_{\Gamma_Q} a_{ikl}\, d\Gamma \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{Q=1}^{N_\Gamma}\sigma_{ij}^o(Q)\int_{\Gamma_Q}(C_{jkl}\cdot n_i + C_{ikl}\cdot n_j)\, d\Gamma - \frac{1}{2}\sum_{e=1}^{N_\Omega}\int_{\Omega e}\left\{\frac{\partial\sigma_{ij}^o}{\partial x_i}C_{jkl} + \frac{\partial\sigma_{ij}^o}{\partial x_j}C_{ikl}\right\}d\Omega\end{aligned} \tag{16}$$

ここで、 $a_{ikl} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial P_i^k}{\partial \xi_l} + \dfrac{\partial P_i^l}{\partial \xi_k}\right)$, $C_{ikl} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i^k}{\partial \xi_l} + \dfrac{\partial u_i^l}{\partial \xi_k}\right)$

式(16)を式(4)へ代入することにより、内部応力を求めることができる。

以上の計算より弾性限界における荷重と温度の関係がわかれば、次に荷重を漸増させて弾塑性の計算に移ることになるが、この段階で式(15)(16)の変位、応力、ひずみをすべて増分量で置き換えればよい。ただし、σ_{ij}^o は $-\dot{\sigma}_{ij}^p$ で置換されることになる。今、応力増分 $\dot{\sigma}_{ij}$ とひずみ増分 $\dot{\varepsilon}_{ij}$ との関係を $\dot{\sigma}_{ij} = f(\dot{\varepsilon}_{ij})$ と置けば、これと式(8)を等置して式(7)を考慮することにより $\dot{\sigma}_{ij}^p$ が次の式で求められる。

$$\dot{\sigma}_{ij}^p = \lambda\cdot\delta_{ij}\cdot\dot{\varepsilon}_{ll} + 2\cdot\mu\cdot\dot{\varepsilon}_{ij} - f(\dot{\varepsilon}_{ij})$$

参考文献

(1) Brebbia, C.A.; The B.E.M. for Engineers, Pentech Press, London (1978)

(2) Rizzo, F.J. and Shippy, D.J.; Developments in Boundary Element Methods-1, Banerjee, P.K. et al; Applied Science Publishers (1979)