I-1　局所化混合法に対する一考察

センチュリリサーチセンタ(株)　正員　武田　洋

1. まえがき

固体力学の支配方程式の一つの表現として変分形式があり，これは有限要素法をはじめとする数値解析手法の基礎として広く用いられていることはよく知られている。代表的な変分形式としては，仮想変位の原理（仮想仕事の原理），仮想力の原理（補仮想仕事の原理）およびHellinger-Reissner原理のような混合形変分原理があるが，有限要素法への適用に関連しては，コンピュータ・プログラムの汎用性および解くべき代数方程式の性質等の観点から，仮想変位の原理がその定式の基礎として最も広く採用されている。一方，非圧縮性体のような拘束形の問題に対して直接に仮想変位の原理を適用することは困難な場合もあり，そのような場合に対しては混合形変分原理が用いられている。また変位形定式を採用した場合の解の性質として，ひずみエネルギーに関して下から収束するという特性を持つので，比較的あらい要素分割を用いて工学的に満足される解を得るためには，高次の補間関数を余儀無くされる場合が多い。このような問題の解決法の一つとして，高精度の有限要素を開発するために，板の曲げ問題を中心に混合形変分原理の応用が試みられている。混合法の大きな欠点としては，その解くべき代数方程式が正値形とならず，従来の変位法のアルゴリズムの範疇でのプログラム化が不可能となることである。この欠点を克服するために最近"局所化"混合法が提案されているが，本論では，固体力学の問題におけるHellinger-Reissner原理から導びかれる局所化混合法の定式について考察することにより，仮想変位の原理および仮想力の原理との関連ついて論じるとともに次数低減数値積分法との等価性について考察する。

2. Hellinger-Reissner原理を基礎とする混合法と局所化

Hellinger-Reissner の汎関数 Π_R は次式で与えられる。

$$\Pi_R = \int\left(\{\sigma\}^t\{\varepsilon\} - \frac{1}{2}\{\sigma\}^t[C]\{\sigma\}\right)dV - \{\hat{u}\}^t\{\hat{P}\} \tag{1}$$

上式において $\{\sigma\}$, $\{\varepsilon\}$ は応力およびひずみを表わし，$\{\varepsilon\}=[C]\{\sigma\}$ であり，$\{\hat{u}\}$, $\{\hat{P}\}$ は節点における変位と力であり，右肩の t は転置を表わす。

ここで次の有限要素近似を導入する。

$$\begin{aligned}&\{\sigma\} = [Z]\{\beta\} \;;\; \{u\} = [\Phi]\{\hat{u}\}\\&\{\varepsilon\} = [D]\{u\} = [D][\Phi]\{\hat{u}\} = [B]\{\hat{u}\}\end{aligned} \tag{2}$$

式(2)を式(1)に代入すると次式が得られる。

$$\Pi_R = \{\beta\}^t[H]^t\{\hat{u}\} - \frac{1}{2}\{\beta\}^t[f]\{\beta\} - \{\hat{P}\}^t\{\hat{u}\} \tag{3}$$

ここで

$$[H] = \int[Z]^t[B]\,dV \;;\; [f] = \int[Z]^t[C]^{-1}[Z]\,dV \tag{4}$$

Π_R が $\{\beta\}$ および $\{\hat{u}\}$ に関して停留となる条件より次の混合形有限要素定式が得られる。

$$\begin{bmatrix} f & H \\ H^t & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \beta \\ -\hat{u} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \hat{P} \end{Bmatrix} \tag{5}$$

式(5)を領域全体について組み立てることにより，解くべき代数方程式が得られる。

ここで一般化力 $\{\beta\}$ を要素ごとに独立であるように選択することにより式(5)は要素単位で $\{\beta\}$ を消去することができ，次の局所化混合法の剛性方程式が得られる。[2]

$$[k]_{LM}\{\hat{u}\} = \{\hat{P}\} \;;\; [k]_{LM} = [H]^t[f]^{-1}[H] \tag{6}$$

上式の要素剛性マトリックスは通常の変位法の解析アルゴリズムでとりあつかうことができる。

3. 局所化混合法に関する考察

仮想力の原理を基本として導びかれる要素剛性関係は次のとおりである。[3]

$$[k]_{VF}\{\hat{u}\} = \{\hat{P}\} \;;\; [k]_{VF} = [L]^t[f]^{-1}[L] \tag{7}$$

ここで $[L]$ は一般化力と節点力の平衡を表わすものであり，次の関係を満足するものである。

$$[L]^t\{\beta\} = \{\hat{P}\} \tag{8}$$

したがって，局所化混合法は，仮想力の原理を基礎とし，

応力仮定から導びかれる剛性関係において，一般化力と節点力の関係[L]の代りに，実際には平衡系にない[H]を用いることとなる。[4] この関係は式(4)，より明らかに仮想変位の原理から導びかれる平衡方程式である。すなわち，仮想変位の原理から導びかれる平衡方程式は

$$\int [B]^t \{\sigma\} dV = \{\hat{P}\} \tag{9}$$

であり，ここで上式に式(2)，を代入すると

$$\int [B]^t [Z] dV \{\beta\} = [H]^t \{\beta\} = \{\hat{P}\} \tag{10}$$

また一般化変位$\{\alpha\}$を仮定し，仮想変位の原理より要素の剛性関係を導びくと次式が得られる。

$$[k]_{VD} \{\hat{u}\} = \{\hat{P}\} \; ; \; [k]_{VD} = [G]^t [k_n] [G] \tag{11}$$

ここで[G]は一般化変位と節点変位を表わす関係，$[k_n]$は固有剛性マトリックスであり，

$$\{\alpha\} = [G] \{\hat{u}\} \; ; \; [k_n] = [T_\alpha]^t [k_K] [T_\alpha] \tag{12}$$

ここで$[T_\alpha]$は一般化変位$\{\alpha\}$とその剛体変形を削除した成分$\{\alpha_D\}$との関係であり，$[k_K]$をここでは核剛性マトリックスと呼び，次のとおりである。

$$\{\alpha_D\} = [T_\alpha] \{\alpha\} \; ; \; \{\varepsilon\} = [B_\alpha] \{\alpha_D\}$$
$$[k_K] = \int [B_\alpha]^t [E] [B_\alpha] dV \tag{13}$$

従って，剛性マトリックスを積分する際に厳密に計算を実行しないということは，$[k_K]$の計算において一般化変位仮定から導びかれる$[B_\alpha]$と異なるものを用いることとなる。$\{\alpha_D\}$を$\{\beta\}$と共役に選択することにより，次式が成立する。

$$[k_K] = [f]^{-1} \tag{14}$$

したがって，$[k]_{VD}$に対して次数低減積分を適用すると，局所化混合法を用いて剛性マトリックスを計算することと等価になる。

4. 局所化混合法を用いた有限要素

固体力学の問題の解析に用いられている次数低減積分を用いた代表的な有限要素について，その局所化混合法としての背景を論じる。紙面の都合上，その具体的記述は省略するが，ここで着目する有限要素は，(1)せん断変形を考慮した梁要素，(2)四辺形平面要素，(3)四辺形板曲げ要素である。

5. あとがき

本論文ではHellinger-Reissner汎関数を基本とするが，アルゴリズムとしては変位法の範疇で取り扱うことの出来る局所化混合法に着目し，その定式の背景を考察するとともに，次数低減数値積分法との関連を論じた。従来より変位形の定式を用いた有限要素が広く用いられているが，応力解析のための近似解法として変位法を考えた場合，一般に低めのひずみエネルギーを与えるという問題点が存在する。この問題に対する解決手段の1つとして，ここで論じたタイプの要素を応用することの可能性が存在する。今後，具体的な要素について，その解の性質等の研究が望まれる。

[参考文献]

[1] 吉田 "有限要素法の基礎としての変分原理に関する一考察" 土木学会論文報告集，第232号，1974

[2] M. Bercovier "Perturbation of Mixed Variational Problems. Application to mixed Finite Element Method" R.A.I.R.O. Analyse numérique, vol 12, No 3, 1978

[3] J.S. Prezeminieki "Theory of Matrix Structural Analysis" McGraw-Hill, New York, 1968

[4] 武田．小笠原．千葉 "弾塑性解析と有限要素補間について" 第33回土木学会年次学術講演会，I-37，1978

[5] 武田 "Reduced Integration 法に対する一理論的考察" 日本鋼構造協会．第13回大会研究集会．マトリックス構造解析法研究発表論文集，No. 9，1979

[6] H. Takeda and H. Isha "Some Considerations on Displacement Assumed Finite Elements with the Reduced Numerical Integration Technique" M1/2，6th SMiRT，1981