Ⅳ-191　サイクリックな作業過程の待ち行列モデルによる定式化と解析法に関する研究

京都大学工学部　正　員　吉川和広

京都大学工学部　正　員　春名　攻

京都大学大学院　学生員　○江尻　良

1．はじめに

本研究ではダンプトラックやしゅんせつ運土作業のようなサイクリックな作業過程を積分方程式や待ち行列理論を用いてモデル化するとともに、その数値解析法に関する考察を行った。まず対象とする作業過程を図-1,2に示すようなモデルとしたが、Type１のモデルは土取場、土捨場のサービスを運搬路のサービスと区別した４ステージのサイクリックキューモデルであり、Type２のモデルは、土取場のサービスが客ごとに異なる形式（異なった

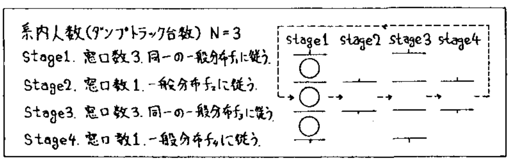

図-1 Type1のモデルの模式図

土取場から１つの土捨場へ客が移動するタイプ）の複合型サイクルキューを表わしている。本研究ではTypeの異なるこの２つのモデルを対象に積分方程式や待ち行列理論を用いたモデルの定式化と解析法に関する考察を行うものである。

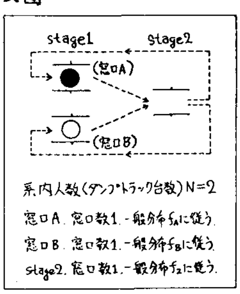

図-2 Type2のモデルの模式図

2．積分方程式を用いたType１のモデルの定式化

積分方程式を用いた数値解析法では、時間の経過を微小な単位時間Δごとの遷移として表わす。時刻t＝0においてstage１の３つの窓口（窓口１，窓口２，窓口３）で３人の客（A，B，C）がサービスを受け始める状態を初期状態とする。さて本解析法では客が一般サービスを受けているものと仮定しているため、任意の時刻における系の遷移構造を客が各窓口で過去に継続して受けて来たサービス時間の長さごとに異なることを考慮して記述する必要がある。そこで本解析法では、系の生起状態を各stageでサービスを受けている客数によって区別するとともに任意の時刻に各stageを終了する客の割合を逐次求める。そしてこれを用いて各窓口でサービスを受けている客が継続して受けて来たサービス時間の期待値を計算し遷移状態を集約的に記述することとした。この状態記述のもとで時刻を進めていくと各状態確率が一定値に収束するので、これらを定常解として求めていくものである。つぎに特に重要と考えられる各stageを終了する客の割合の定式化について述べておくこととする。すなわち、t＝0にstage１の窓口１のサービスを終了する客Aの割合を１とする（この場合客B，客Cについても同様に考えることができる）。任意の時刻$t=n\Delta\ (n=0,1\cdots)$において各stageを終了する客の割合をそれぞれ$x_k(n\Delta)$，（$k=1,2,3,4$）とするとき、この値は

$$0\leq x_k(n\Delta)\leq 1\quad (k=1,2,3,4)$$

を満たす。ここでは$x1(n\Delta)$について説明を行うとこの割合は次の２つの割合の和として考えることができる。

・割合１：t＝0からt＝(n−1)Δまでstage1の同じ窓口でサービスを受けており、t＝nΔで初めて終了する客の割合

・割合２：t＝nΔ以前に少なくとも１回以上stage１の窓口でサービスを受けた後stage2，stage3，stage4のサービスを受け、t＝nΔに再びstage１を終了する客の割合

ここで客がstage1，stage３を終了した時点において、stage2 stage4では、①客Aがただちにサービスを受け始める．②他の１人の客がサービスを受け始める．③他の１人の客がすでにサービスを受けている．④他の１人の客がサービスを受け始めもう１人の客が待ち行列を作り始める．⑤他の１人の客がすでにサービスを受けており、もう１人の客が待ち行列を作り始める、という①〜⑤の事象が生起することを考慮しておく必要がある。これより$x1(n\Delta)$は次のように定式化することができる。

$$\begin{aligned}x1(n\Delta)=&f_1(n\Delta)+\sum_{i=0}^{n-1}x1(i\Delta)\cdot\sum_{j=0}^{n-1}[G40(j\Delta)\cdot f_{41}[(n-j)\Delta]+G41(j\Delta)\\&\cdot f_{441}[(n-j)\Delta]+G42(j\Delta)\cdot f^*_{441}[\overline{I4(j\Delta)},(n-j)\Delta]+G43(j\Delta)\cdot f_{4441}[(n-j)\Delta]\\&+G44(j\Delta)\cdot f^*_{4441}[\overline{I4(j\Delta)}\cdot(n-j)\Delta]]\cdot[G20(i\Delta)\cdot f_{23}[(j-i)\Delta]+G21(i\Delta)\cdot f_{223}[(j-i)\Delta]\\&+G22(i\Delta)\cdot f^*_{223}[\overline{I2(i\Delta)},(j-i)\Delta]+G23(i\Delta)\cdot f_{2223}[(j-i)\Delta]+G24(i\Delta)f^*_{2223}[\overline{I2(i\Delta)},(j-i)\Delta]]\end{aligned}$$

ただし　$f_{23}=f_2 \circledast f_3$：$f_2$と$f_3$のたたみこみ操作を表す

$f^*(I,\tau)$：過去継続してI時間だけサービスを受けた客が次のτ時間にその窓口のサービスを終了する確率

$G20(i\Delta), \cdots, G40(i\Delta)$: $t=i\Delta$に事象①～⑤が生起する確率

$\overline{I_k(i\Delta)}$: $t=i\Delta$においてstage k ($k=1,2,3,4$) でサービス中の客が過去に継続して受けて来たサービス時間の期待値

3. 指数サービスに従う場合のType2のモデルの定式化

1.で示したようにstage1の各窓口が異なったサービス率を有するタイプのモデルとして、各窓口がそれぞれμ_A, μ_B, μ_2のサービス率の指数サービスを行うと仮定する。このとき系の生起状態と遷移の構造は図-3に示すようになる。これより状態方程式を以下のように定式化することができる。

$$P0(t)+P1(t)+P2(t)+P3(t)+P4(t)=1$$

$$P0(t+\Delta t)=(1-\mu_A\Delta t)(1-\mu_B\Delta t)P0(t)+(1-\mu_B\Delta t)\cdot\mu_2\Delta t\cdot P1(t)+(1-\mu_A\Delta t)\cdot\mu_2\Delta t\cdot P2(t)$$

$$P1(t+\Delta t)=\mu_A\Delta t\cdot(1-\mu_B\Delta t)\cdot P0(t)+(1-\mu_B\Delta t)(1-\mu_2\Delta t)P1(t)+\mu_A\mu_2\cdot(\Delta t)^2P2(t)+\mu_2\Delta tP4(t)$$

$$P2(t+\Delta t)=\mu_B\Delta t\cdot(1-\mu_A\Delta t)\cdot P0(t)+(1-\mu_A\Delta t)(1-\mu_2\Delta t)P2(t)+\mu_B\cdot\mu_2(\Delta t)^2\cdot P1(t)+\mu_2\Delta t\cdot P3(t)$$

$$P3(t+\Delta t)=\frac{1}{2}\mu_A\cdot\mu_B(\Delta t)^2P0(t)+\mu_B\Delta t(1-\mu_2\Delta t)P1(t)+(1-\mu_2\Delta t)\cdot P3(t)$$

$$P4(t+\Delta t)=\frac{1}{2}\mu_A\cdot\mu_B(\Delta t)^2P0(t)+\mu_A\Delta t(1-\mu_2\Delta t)P2(t)+(1-\mu_2\Delta t)\cdot P4(t)$$

このように定式化すると$t\to\infty$の時の定常状態における解は次のように求められる。

$$P0=\left[1+\frac{\mu_A+\mu_B}{\mu_2}+\frac{2\mu_A\cdot\mu_B}{(\mu_2)^2}\right]^{-1} \qquad P1=\frac{\mu_A}{\mu_2}P0 \qquad P2=\frac{\mu_B}{\mu_2}P0$$

$$P3=P4=\frac{\mu_A\cdot\mu_B}{(\mu_2)^2}P0$$

ⓘ→ 窓口iの客がサービスを終了する。
ⓘ 窓口iの客がサービスを終了しない。

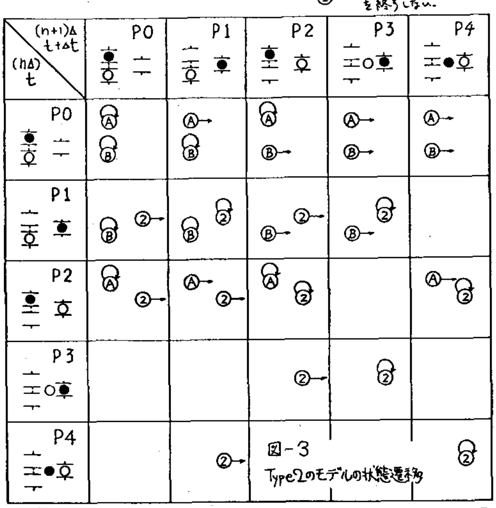

図-3 Type2のモデルの状態遷移

4. 一般サービスに従う場合の逐次近似解析法によるType2のモデルの定式化

ここでいう逐次近似解析法とは、系の生起状態を客が各窓口で過去に継続して受けて来たサービス時間の長さごとに区別して記述し、この各生起状態間の遷移を微小な単位時間Δごとに逐次計算し定常解が得られるまでくり返し計算を行う解析法である。解析の出発点としてstage1の各窓口で客A, Bがサービスを受け始めた状態を初期状態とする。生起状態として図-3に示すようにサービスを受けている窓口の組合せとさらに過去に継続して受けて来たサービス時間の長さによって記述する。例を示すとつぎのようである。すなわち、$P0(SA0, SB0|n\Delta)$は時刻$t=n\Delta$ $(n=1,2\cdots)$においてstage1の窓口Aで客Aが過去継続して$SA0\ (=0, \Delta, \cdots n\Delta)$だけサービスを受けており、窓口Bで客Bが過去継続して$SB0\ (=0, \Delta, \cdots n\Delta)$だけサービスを受けている状態の生起確率を表すものとする。同様に$P1(S21, SB1|n\Delta)$, $P2(SA2, S22|n\Delta)$ $P3(S23|n\Delta)$, $P4(S24|n\Delta)$を定義しておくとこれらの生起確率は次式を満たす。

$$P0(n\Delta)=\sum_{SA0,SB0=0}^{n\Delta}P0(SA0,SB0|n\Delta)$$

$$\vdots$$

$$P4(n\Delta)=\sum_{S24=0}^{n\Delta}P4(S24|n\Delta)$$

$$P0(n\Delta)+P1(n\Delta)+P2(n\Delta)+P3(n\Delta)+P4(n\Delta)=1$$

$$P0(t=0)=1,\ P1(0)=P2(0)=P3(0)=P4(0) \quad \text{(初期条件)}$$

この状態記述のもとで$t=(n-1)\Delta$から$t=n\Delta$の状態の遷移を、各窓口で過去継続してS時間だけサービスを受けて来た客がΔ時間内にそのサービスを終了するという条件付確率$E_k(S,\Delta)$, $(k=A,B,2)$を用いて以下のように定式化できる。

$n=0$

$$P0(0,0|0)=1.0 \quad \text{(初期状態)}$$

$n\geq 1$

$$P0(0,0|n\Delta)=0.0 \quad \text{(生起しない)}$$

$SB0=0$ のとき

$$P0(SA0,0|n\Delta)=\sum_{SA2=0}^{(n-1)\Delta}P2(SA0-\Delta,S22|(n-1)\Delta)\cdot[1.0-EA(SA0-\Delta,\Delta)]\cdot E2(S22,\Delta)$$

$SA0=0$ のとき

$$P0(0,SB0|n\Delta)=\sum_{S21=0}^{(n-1)\Delta}P1(S21,SB0-\Delta|(n-1)\Delta)\cdot[1.0-EB(SB0-\Delta,\Delta)]\cdot E2(S21,\Delta)$$

$\Delta\leq SA0\leq n\Delta$, $\Delta<SB0\leq n\Delta$ のとき

$$P0(SA0,SB0|n\Delta)=P0(SA0-\Delta,SB0-\Delta|(n-1)\Delta)\cdot[1.0-EA(SA0-\Delta,\Delta)]\cdot[1.0-EB(SB0-\Delta,\Delta)]$$

このようにして、微小時間Δごとに各生起確率を順次計算をすると定常解を得ることができるのである。

5. 積分方程式を用いたType2のモデルの解析法

本解析法では2.で述べた解析法を若干拡張して以下に述べる方法によって定式化を行った。つまりType2のモデルに対しては、各stageのサービスを終了する客の割合をそれぞれの客ごとに計算しておく。さらに系の遷移を、各生起状態(窓口の組合せによって記述する)ごとに任意の時刻に過去に継続して受けて来たサービス時間がS時間である客の割合を求めてこの割合ごとに遷移の構造を記述したのである。

6. おわりに

以上に述べて来た各解析法を用いた数値計算例ならびにその問題点に関しては、講演時に具体的に述べていくこととする。