

1. まえがき 三角網(鎖)のすべての辺長と交角を測定する測量を三辺三角測量と称する。光波距離計の出現により実施可能となった新しい基準点測量である。この三辺三角測量によって従来の基準点測量の精度をさらに上げ得るものと考えられる。然るにこの三辺三角測量の誤差調整の文献は見当らない現状であり将来有望なこの基準点測量に対して何らかの調整法の出現が望まれる。本研究はこれに鑑み三辺三角測量の合理的実用的な調整法を提示するものである。

2. 三角形の調整 Fig 1 のような三角形について次の通りに記号を定める($i=1\sim 3$)。

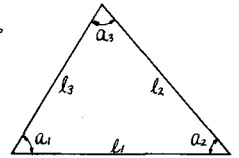
l_i : 辺長の測定値 v_i : 辺長の補正量 α_i : 交角の測定値

$\delta\alpha_i$: 交角の補正量(radian) α_i : 辺長の測定値より計算で求まる交角

三角形の辺長と交角の関係の幾何学的条件より次の3個の独立した誤差方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 + \varepsilon_1 &= 0 & \text{-----(1)} \\ A v_1 + B v_2 + C v_3 + \beta_1 &= 0 & \text{-----(2)} \\ F v_1 + D v_2 + E v_3 + \beta_2 &= 0 & \text{-----(3)} \end{aligned} \right\} \textcircled{1}$$

但し①式中のA B C D E F及び
 $\varepsilon_1, \beta_1, \beta_2$ は下の通りである。尚A~Fの値は
※を参照して機械的に求め得る。



(Fig 1)

α_1	$\cos^{-1}\left(\frac{l_2^2 + l_3^2 - l_1^2}{2 l_2 l_3}\right)$	A	$\frac{l_2^2 - l_3^2 + l_1^2}{2 \sin \alpha_1 l_2 l_3}$	B	$\frac{l_2}{\sin \alpha_1 l_2 l_3}$	C	$\frac{-l_1^2 + l_2^2 + l_3^2}{2 \sin \alpha_1 l_2 l_3}$
α_2	$\cos^{-1}\left(\frac{l_1^2 + l_3^2 - l_2^2}{2 l_1 l_3}\right)$	D	$\frac{l_2^2 - l_1^2 + l_3^2}{2 \sin \alpha_2 l_2 l_1}$	E	$\frac{l_3}{\sin \alpha_2 l_2 l_1}$	F	$\frac{-l_2^2 + l_1^2 + l_3^2}{2 \sin \alpha_2 l_2 l_1}$

$$\varepsilon_1 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 180^\circ) / 206265'' \text{ (radian)}$$

$$\beta_1 = (\alpha_1 - \alpha_1) / 206265'' - y_1 \quad (\text{ })$$

$$\beta_2 = (\alpha_2 - \alpha_2) / 206265'' - y_2 \quad (\text{ })$$

①式を同時に最小二乗法により解けば最も厳密な辺長と交角の補正量を求め得るがこの厳密解法は省略する(講演時に①式の誘導及びA~Fの機械的な求め方並びに厳密解法(数値計算例を含む)に触れたい)。

実用的には最初交角のみを何らかの合理的な方法(一般には測点角辺条件を満足するように)により調整し次に④式の(2)(3)式より辺長の補正量を求める方法が精度努力時間的に考えて有理であり以下これを実用的調整法と呼ぶことにする。尚光波距離計による辺長の測定の重さは実用上同一として進めるものとする。

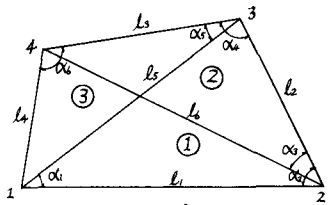
実用的調整法として④式の(2)(3)を同時に最小二乗法(未定係数法)により解けば次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= A K_1 + F K_2 & v_2 &= B K_1 + D K_2 \\ v_3 &= C K_1 + E K_2 \end{aligned} \right\} \text{正規方程式は} \left. \begin{aligned} (A^2 + B^2 + C^2) K_1 + (AF + BD + CE) K_2 &= -\beta_1 \\ (AF + BD + CE) K_1 + (D^2 + E^2 + F^2) K_2 &= -\beta_2 \end{aligned} \right\}$$

3. 四辺形の調整 四辺形, 有心多角形, 単列三角鎖等を代表して Fig 2

のような四辺形の実用的調整法について説明する。△123, △234, △341を各々①②③とし各三角形の任意の二角に番号を入れる。前述と同様に3個の三角形について次の6個の誤差方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= A_1 v_1 + B_1 v_2 + C_1 v_3 + \beta_1 = 0 & g_2 &= D_1 v_2 + E_1 v_3 + F_1 v_1 + \beta_2 = 0 \\ g_3 &= A_2 v_2 + B_2 v_3 + C_2 v_4 + \beta_3 = 0 & g_4 &= D_2 v_3 + E_2 v_4 + F_2 v_2 + \beta_4 = 0 \\ g_5 &= A_3 v_3 + B_3 v_4 + C_3 v_1 + \beta_5 = 0 & g_6 &= D_3 v_4 + E_3 v_1 + F_3 v_3 + \beta_6 = 0 \end{aligned} \right\} \textcircled{2}$$



(Fig 2)

但し $\beta_i = (\alpha_i - \alpha_i) / 206265'' - y_i$ であり($i=1\sim 6$)。 $A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_n$ ($n=1\sim 3$)は前述の方法で得られる値である。然して②式を同時に次の条件のもとに最小二乗法を適用すればよい。

三角形番号	方程式	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	方程式右辺
①	1	$A_1^2 + B_1^2 + C_1^2$	$AF_1 + BD_1 + CE_1$	$B_1 A_2$	$B_1 F_2$	$C_1 C_3$	$C_1 E_3$	$-\beta_1$
	2	$AF_1 + BD_1 + CE_1$	$D_1^2 + E_1^2 + F_1^2$	$D_1 A_2$	$D_1 F_2$	$E_1 C_3$	$E_1 E_3$	$-\beta_2$
②	3	$B_1 A_2$	$D_1 A_2$	$A_2^2 + B_2^2 + C_2^2$	$A_2 F_2 + B_2 D_2 + C_2 E_2$	$B_2 A_3$	$B_2 F_3$	$-\beta_3$
	4	$B_1 F_2$	$D_1 F_2$	$A_2 F_2 + B_2 D_2 + C_2 E_2$	$D_2^2 + E_2^2 + F_2^2$	$D_2 A_3$	$D_2 F_3$	$-\beta_4$
③	5	$C_1 C_3$	$E_1 C_3$	$B_2 A_3$	$D_2 A_3$	$A_3^2 + B_3^2 + C_3^2$	$A_3 F_3 + B_3 D_3 + C_3 E_3$	$-\beta_5$
	6	$C_1 E_3$	$E_1 E_3$	$B_2 F_3$	$D_2 F_3$	$A_3 F_3 + B_3 D_3 + C_3 E_3$	$D_3^2 + E_3^2 + F_3^2$	$-\beta_6$

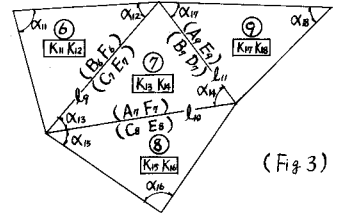
$$S \equiv [u^2] - 2K_1g_1 - 2K_2g_2 - 2K_3g_3 - 2K_4g_4 - 2K_5g_5 - 2K_6g_6 = \text{minimum}$$

$\partial S / \partial u_i = 0$ より次の補正量を得る。 $u_1 = A_1K_1 + F_1K_2$ $u_2 = B_1K_1 + D_1K_2 + A_2K_3 + F_2K_4$ $u_3 = B_2K_3 + D_2K_4$
 $+ A_3K_5 + F_3K_6$ $u_4 = B_3K_5 + D_3K_6$ $u_5 = C_1K_1 + E_1K_2 + C_3K_5 + E_3K_6$ $u_6 = C_2K_3 + E_2K_4$ ----- ③

③式を②式に代入して整理すれば前頁下の正規方程式を得る。この6元一次連立方程式を解いて $K_1 \cdots K_6$ を求めこれを③式に代入して辺長の補正量を求め得る。尚正規方程式の係数は対角係数に対して左右対称になる。

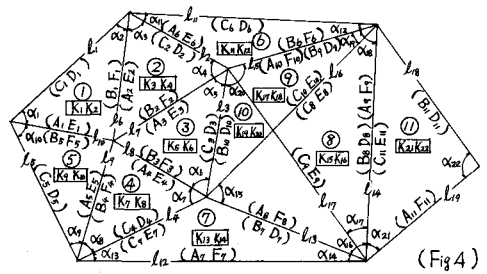
4. 補正量の式と正規方程式を機械的に作成する方法 最小2乗法により得られる結果を帰納して、一般の三角網に対する補正量の式と正規方程式を理屈抜きに容易に作成できる機械的な方法について説明する。この方法はどんな複雑な三角網についても適用できるものでFig3のような三角網の一部を例にとりその要領を述べる。

- (1) すべての三角形に番号を付け(--- ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ---) 各三角形の $\square$ に未知係数(--- $K_{11} K_{12}$ $K_{13} K_{14}$ ---)を記入し各辺長に()を入れる。
- (2) 各辺長に番号を入れ(--- l_9, l_{10}, l_{11} ---) 各三角形の任意の二角にも番号を付ける(--- $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}$ ---)。
- (3) 各三角形の辺長の()内に(2)で番号を付した交角の係数 $A_n \sim F_n$ を記入する(--- $(B_6 F_6), (C_7 E_7)$ ---)。但し一交角につき左まわりに $A_n \sim F_n$ と付ける。
- (4) β_i を求め(例えば $\beta_{13} = \alpha_{13} - \alpha_{12} - \alpha_{14}$) 下の表の要領で正規方程式と補正量の式を作成する。但し三角形⑧と⑨についてのみ掲げる。



(Fig 3)

三角形 番号	式 番号	正 規 方 程 式 左 辺	方 程 式 右 辺
		⑥⑦の係数 $(C_7 E_7) (B_6 F_6)$ のたすき掛 α_{13} の係数の二乗の和 $A_7^2 + B_6^2 + C_7^2$ α_{12}, α_{14} の係数の積の和 $A_7 F_6 + B_6 D_7 + C_7 E_7$	
⑦	13	$C_7 B_6$ $C_7 F_7$ M_7 R_7 $A_7 C_6$ $A_7 E_8$ $B_7 A_7$ $B_7 E_9$	$-\beta_{13}$
	14	$E_7 B_6$ $E_7 F_7$ R_7 N_7 $F_7 C_6$ $F_7 E_8$ $D_7 A_7$ $D_7 E_9$	$-\beta_{14}$
		α_{14} の係数の二乗の和 $D_7^2 + E_7^2 + F_7^2$ ⑦⑧の係数 $(A_7 F_7) (C_8 E_8)$ のたすき掛 ⑦⑧の係数 $(B_7 D_7) (A_8 E_8)$ のたすき掛	
$u_9 = B_6 K_{11} + F_6 K_{12} + C_7 K_{13} + E_7 K_{14}$ --- 辺長 l_9 に対して⑦⑧の係数未知係数の積の和 (他も同様)			



(Fig 4)

5. 三角網の一部 Fig 4 のような三角網の補正量の式と正規方程式は上述の方法により次のようになる。

三角形 番号	式 番号	正 規 方 程 式 左 辺	方 程 式 右 辺
①	1	M_1 R_1 $B_1 A_2$ $B_1 E_3$	$-\beta_1$
	2	N_1 $F_1 A_2$ $F_1 E_3$	$-\beta_2$
②	3	M_2 R_2 $B_2 A_3$ $B_2 E_4$	$-\beta_3$
	4	N_2 $F_2 A_3$ $F_2 E_4$	$-\beta_4$
③	5	M_3 R_3 $B_3 A_4$ $B_3 E_5$	$-\beta_5$
	6	N_3 $F_3 A_4$ $F_3 E_5$	$-\beta_6$
④	7	M_4 R_4 $B_4 A_5$ $B_4 E_6$	$-\beta_7$
	8	N_4 $F_4 A_5$ $F_4 E_6$	$-\beta_8$
⑤	9	M_5 R_5	$-\beta_9$
	10	N_5	$-\beta_{10}$
⑥	11	M_6 R_6 $B_6 B_7$ $B_6 D_7$ $B_6 A_{10}$ $B_6 F_{10}$	$-\beta_{11}$
	12	N_6 $F_6 B_7$ $F_6 D_7$ $F_6 A_{10}$ $F_6 F_{10}$	$-\beta_{12}$
⑦	13	M_7 R_7 $B_7 A_8$ $B_7 F_8$	$-\beta_{13}$
	14	N_7 $F_7 A_8$ $F_7 F_8$	$-\beta_{14}$
⑧	15	M_8 R_8 $B_8 A_9$ $B_8 F_9$ $C_8 C_9$ $C_8 E_{10}$ $B_8 C_{11}$ $B_8 E_{11}$	$-\beta_{15}$
	16	N_8 $F_8 A_9$ $F_8 F_9$ $E_8 C_9$ $E_8 E_{10}$ $D_8 C_{11}$ $D_8 E_{11}$	$-\beta_{16}$
⑨	17	M_9 R_9 $B_9 A_{10}$ $B_9 F_{10}$ $A_9 C_{11}$ $A_9 E_{11}$	$-\beta_{17}$
	18	N_9 $F_9 A_{10}$ $F_9 F_{10}$ $F_9 C_{11}$ $F_9 E_{11}$	$-\beta_{18}$
⑩	19	M_{10} R_{10}	$-\beta_{19}$
	20	N_{10}	$-\beta_{20}$
⑪	21	M_{11} R_{11}	$-\beta_{21}$
	22	N_{11}	$-\beta_{22}$

補正量

$u_1 = C_1 K_1 + D_1 K_2$
 $u_2 = C_2 K_3 + D_2 K_4 + A_2 K_5 + E_2 K_6$
 $u_3 = C_3 K_5 + D_3 K_6 + B_3 K_7 + F_3 K_8$
 $u_4 = A_1 K_1 + E_1 K_2 + B_1 K_3 + F_1 K_4$
 $u_5 = B_2 K_3 + D_2 K_4 + A_2 K_5 + E_2 K_6$
 $u_6 = B_3 K_5 + D_3 K_6 + B_3 K_7 + F_3 K_8$
 $u_7 = A_1 K_1 + E_1 K_2 + B_1 K_3 + F_1 K_4$
 $u_8 = A_2 K_5 + E_2 K_6 + B_2 K_7 + F_2 K_8$
 $u_9 = A_3 K_5 + E_3 K_6 + B_3 K_7 + F_3 K_8$
 $u_{10} = A_4 K_5 + E_4 K_6 + B_4 K_7 + F_4 K_8$
 $u_{11} = A_5 K_5 + E_5 K_6 + B_5 K_7 + F_5 K_8$
 $u_{12} = A_6 K_5 + E_6 K_6 + B_6 K_7 + F_6 K_8$
 $u_{13} = A_7 K_5 + E_7 K_6 + B_7 K_7 + F_7 K_8$
 $u_{14} = A_8 K_5 + E_8 K_6 + B_8 K_7 + F_8 K_8$
 $u_{15} = A_9 K_5 + E_9 K_6 + B_9 K_7 + F_9 K_8$
 $u_{16} = A_{10} K_5 + E_{10} K_6 + B_{10} K_7 + F_{10} K_8$
 $u_{17} = A_{11} K_5 + E_{11} K_6 + B_{11} K_7 + F_{11} K_8$
 $u_{18} = A_{12} K_5 + E_{12} K_6 + B_{12} K_7 + F_{12} K_8$
 $u_{19} = A_{13} K_5 + E_{13} K_6 + B_{13} K_7 + F_{13} K_8$
 $u_{20} = A_{14} K_5 + E_{14} K_6 + B_{14} K_7 + F_{14} K_8$
 $u_{21} = A_{15} K_5 + E_{15} K_6 + B_{15} K_7 + F_{15} K_8$
 $u_{22} = A_{16} K_5 + E_{16} K_6 + B_{16} K_7 + F_{16} K_8$

6. あとがき 三辺三角測量の実用的調整法は結局何個の三角形の網では2n元一次連立方程式を解くことに帰着する。電子計算機の普及した現在この解法そのものにはさしたる困難がない。その気になればどんな三角網でも本方法により合理的に調整可能である。講義時には種々の三角網の数値計算例を披露したい。

7. 参考文献 *三辺測量の図形調整法における従来の条件式数と示式が誤りであることの証明(第34回年度学術講演会講演概要集第4部)