# IV-173　平面線形要素としての Elastica の曲線について

日本大学工学部　正員　木村喜代治

(1) はじめに：路線の平面形要素として，らせん曲線の一種である Clothoid 曲線が広く用いられている。一般に二地点間を結ぶ道路は交互に左右に屈曲していることが多い。そこで同種の曲線を用いるとき，基本的に周期関数で表わされる線形が合理的であるように思われる。von Schelling (1951) は平板上に一定速度で動く粒子が微少距離進んだときのふれ角の生起確率が Gauss の正規分布に従がうものとし，二点間を結ぶ経路のうち最頻経路を求めた。自動車を一つの移動粒子とみるとき，このような曲線が道路の平面形要素として適当であらうと予想される。なお，Langbein と Leopold (1966) は von Schelling の理論を河川の蛇行に用いた。著者は (1979年講) この蛇行形状と Hydrostatic curve，Elastica の曲線などと全く相似であり，また単振子の運動と相似であることを示した。この曲線形は Euler (1744) により Elastica の曲線として最初に示されたので，ここでは Elastica の曲線または単に Elastica と称することにする。曲線の各種形状は著者が前に (1962年講) Hydrostatic curve として表わしたものを Fig.1 に示す。

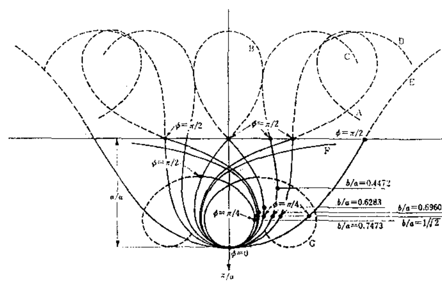


Fig. 1

(2) 基本式：二点間の位置と与へられた長さの連続曲線において最頻経路となる曲線のうち von Schelling が示した曲線の一種は

$$\frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2-2\cos\theta=-2\cos\theta_0 \qquad \therefore\ s=\frac{1}{\sigma}\int\frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\theta_0)}} \qquad (1)$$

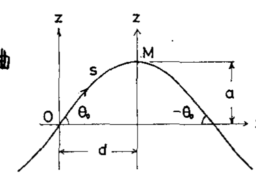


Fig. 2

$\theta$：曲線の接線と $x$ 軸とのなす角，$s$：曲線長，$\sigma$：$ds$ に対するふれ角 $d\theta$ の標準偏差。式(1)はだ円積分であり，周期関数であるから OM 間の形状が決まるとあとは $z$ 軸対称よりすべての形状が決まる。式(1)で $1/\sigma=A$ とし，$\theta$ の表現および $s$ の方向を Fig.2 のようにする。式(1)より

$$-\rho z=A^2 \qquad (2)$$

となる。ただし左辺の負号は $s$ の向きや $\theta$ の表示方法などにより正号となることもある。ここの表示法によると $z>0$ で $\rho<0$，また $z<0$ で $\rho>0$ となる。$z$ 軸を O 点を通る軸に移動すると

$$\left.\begin{aligned}&s=A\{K(k)-F(\phi,k)\},\ S=AK(k),\ z=2kA\cos\phi,\ a=2kA=-4k^2\rho_0\\&x=2A\{E(\pi/2,k)-E(\phi,k)\}-A\{K(k)-F(\phi,k)\},\ d=2AE(\pi/2,k)-AK(k)\\&k=\sin(\theta_0/2)=\sqrt{(1-\cos\theta_0)/2},\ \sin(\theta/2)=k\sin\phi\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

$s$：O点よりの曲線長，$S$：曲線 OM の長さ，$\rho_0$：頂点 M における曲率半径，E：第2種だ円積分，F：第1種だ円積分。Elastica の曲線は $A$, $\theta_0$, $\rho_0$, $a$, $d$, $S$ などのうち2個が決まれば形状が確定する。

(3) 自動車の走行との関係：自動車が一定速度 $v$ で走行するものとし，運転者が滑らかなハンドル操作によって方向を変へ曲線に沿った運転をする。曲線の頂点 M, P, R 等において曲率半径 $\rho_0$ は最小であり，自動車前輪の転向角は最大となる。また O, N, Q 等においては，前輪転向角は0である。O点から M に向かってハンドルを右回転していた自動車が M 点で最大の転向角となり，それよりハンドルを左回転し，N から P に到る。P よりはハンドル右回転となる。いまハンドルの回転角速度を $\omega'$ とし

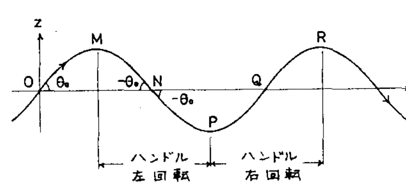


Fig. 3

$$\omega' = K\, dz/dt \qquad (4)$$

なるように変化したとする。ただしKは定数。このハンドル操作ではM，P，R点に近づくに従がって角速度は減少し，それらの点で0となり，続いて回転方向を反転する。ハンドル操作は滑らかである。円弧との接続ではOM間を緩和曲線として用いれば，M点でハンドル回転を静止したままでよい。O点からt時間後のハンドル回転角をγとすると　$\gamma = K\int_0^t dz/dt\cdot dt = Kz$　前輪の転向角をβとすると　$\beta = c\gamma$（c：比例定数）　と考えられる。よって　$z>0$ で $\beta>0$，$z<0$ で $\beta<0$　となる。自動車の前後輪車軸間かくをhとし，転向角βのとき自動車の回転曲率半径ρは　$-\rho = h/\tan\beta \doteqdot h/\beta = h/(cKz)$　ただし $\beta>0$ で $\rho<0$，$\beta<0$ で $\rho>0$ とする。よって　$-\rho z = h/(cK)$　右辺は定数であり　$h/(cK) = A^2$　とする。すなわち上式は　$-\rho z = A^2$　となって Elastica の基本式となる。自動車が曲線に沿って等速走行したとき，その角速度ωは　$\omega = -v/\rho$　より　$d\omega/dt = v/A^2\cdot dz/dt$，よって　$\omega' = h/(cv)\cdot d\omega/dt$　となりハンドルの回転角速度は自動車の角加速度に比例する。

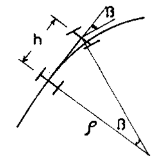


Fig. 4

(4) 緩和曲線：直線と円弧を結ぶ緩和曲線に Fig.2 の OM の部分を用いることを考える。この問題では Fig.5 の e と円の半径 $\rho_0$ とが既知である。なお，本節および次節の計算で $-\rho_0$ を改めて $\rho_0$ とした。M点の曲率半径を円の半径に一致せしめ，O点で直線に接続するようにする。

$$e/\rho_0 = 2k\{2E(\pi/2,k) - K(k)\}\sin\theta_0 - (4k^2-1)\cos\theta_0 \qquad (5)$$

右辺は $\theta_0$ のみの関数であり表化することは容易である。また曲線の始点Oの位置は

$$OH = 1/\cos\theta_0\cdot(d - e\sin\theta_0) \qquad (6)$$

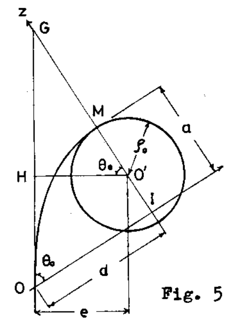


Fig. 5

Clothoid と Elastica とを同一条件で比較すると曲線長は Elastica の方が10〜20%ほど長くなる。曲線の各点における曲率を求めると Fig.6 のようになる。Elastica の方が円曲線への接続が滑らかであり，接続点のハンドル操作上都合のよいことがわかる。しかし直線との接続においてハンドルの角速度は Clothoid より $\theta_0$の小さなとき30%程度大きくなる。平面形状が凸型で中間に円弧がないとき Clothoid ではハンドル操作が急反転する不都合があるが Elastica においては滑らかである。

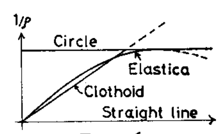


Fig. 6

(5) 二曲線の接続：1) 頂点における接続：頂点Mにおける二曲線の曲率半径を同一にすることが条件となる。二曲線のMを一致せしめ，x軸を平行移動して考える。式(3)より

$$\rho_0 = a_1/2(1-\cos\theta_1) = a_2/2(1-\cos\theta_2) \qquad (7)$$

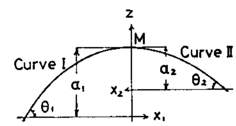


Fig. 7

これを満足するもののうちから適当なものを選ぶ。これにより自動車の受ける遠心力変化，ハンドル操作とも滑らかになる。

2) x軸上の接続：二曲線が Fig.8 のN点で接続することを考える。S字あるいは逆S字型においては，その間でハンドルの回転方向が同方向である。N点で二曲線の接線を共通としx軸を回転して考える。曲線上を自動車が一定速度で走行するとき，ハンドルの回転角速度が自動車の角加速度に比例するから，N点で両曲線の角加速度を同一にすることが条件となる。

$$a_2^2/a_1^2 = \sin\theta_2(1-\cos\theta_2)/\{\sin\theta_1(1-\cos\theta_1)\} \qquad (8)$$

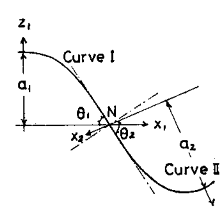


Fig. 8

(6) まとめ：1) 平面形の要素として Elastica の曲線を提案した。 2) 凸型や円弧への接続ではハンドル操作において Clothoid より Elastica の方が優れており，滑らかな操作となる。 3) Elastica の二曲線の滑らかな接続の条件を示した。これらの曲線の選定はかなりの任意性がある。なお Clothoid の S型で Fig.8 の N点における接続では，N点対称の合同な型以外はハンドル操作上滑らかな接続とは言えない。 4) Elastica の曲線であるから弾性薄板（スチールテープ片のような）を用いて曲線の概型を知ることが出来る。