Ⅳ－162　Box－Jenkins 法による交通量の予測

信州大学工学部　正員　奥谷巖

1．まえがき

筆者は先にKalman Filter理論を応用した交通量の動的な予測理論を開発した。[1)] この方法の特徴は，ある1つのリンクの交通量予測に際し，それに関連すると思われる他のリンクの交通量情報も利用しているという点である。これに対し，自己回帰分析による方法等のように，当該予測リンクのみにおける交通量の時系列から予測を行なうという方法もある。今回は比較の対象にするという観点から，こうした方法についてより総合的に検討を加えるものとし，従来の自己回帰分析等をすべて包括するBoxとJenkinsによって開発された手法に着目してみた。

2．Box－Jenkinsi法

ここで用いる方法は，通称ARIMA(p, d, q)とよばれている方法で，一般的には次のようなモデルを考える。すなわち

$$\phi(B)(1-B)^d Z_t = \theta_0 + \theta(B)a_t \qquad (1)$$

ここに，B：後退作用素，

$$\phi(B) = 1-\phi_1 B-\phi_2 B^2-\cdots-\phi_p B^p \qquad (2)$$

$$\theta(B) = 1-\theta_1 B-\theta_2 B^2-\cdots-\theta_q B^q \qquad (3)$$

θ_0：定数　a_t：ホワイトノイズ　Z_t：時刻tの交通量　である。

$\phi_1 \sim \phi_p$，$\theta_1 \sim \theta_q$ および a_t の分散 σ_a^2 は時系列データから決定すべきパラメータである。この方法は非定常な場合にでも適用できるという大きな特色があり，その意味でかなり汎用性があると考えられている。

3．採用すべきモデルの決定

まず最初に行なう必要があるのは，p，d，q の値を決定することである。この値を決定するということは，とりもなおさず予測モデルとして何を採用するかを決めることである。たとえば，$p=0$，$d=0$，$q>0$ ならばMA(q)モデル（移動平均モデル），$p=0$，$d>0$，$q>0$ ならばIMA($0, d, q$)モデル，$p>0$，$d=0$，$q=0$ ならばAR(p)モデル（自己回帰モデル），$p>0$，$d=0$，$q>0$ ならば，従来のARMA(p, q)モデル（自己回帰移動平均モデル）になる。

さて，まずdの決定であるが，そのためにはZ_t，$\nabla Z_t = Z_t - Z_{t-1}$　(4)　$\nabla^2 Z_t = \nabla Z_t - \nabla Z_{t-1}$　(5)　などの時系列に関して，自己相関係数のグラフを作成する（少くとも20ぐらいの時間ずれのものに対するものをプロットするとよい）。そうして，$\nabla^d Z$ のグラフではじめて自己相関係数がかなり急な勾配で減衰していたら，そのときのdの値をもってdとするのである。

次に，$W_t = \nabla^d Z_t$　(6)　とおいたときに，そのW_tの時系列に関して自己相関係数のグラフを描く。そして，そのグラフにおいて，曲線が指数関数的に減少しているか，正負の領域にわたり振動しながら減少していれば，W_tについてAR(p)のモデルを採用する。その場合，pの値をどのような値にするかについて，さらに偏自己相関係数のグラフを描く必要があるが，この偏自己相関係数についてはいわゆるYule－Walkerの連立方程式を解いて求める。すなわち

$$R_p \phi_p = r \qquad (7)$$

ここに

$$R_p = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & r_2 & \cdots & r_{p-1} \\ r_1 & 1 & r_1 & \cdots & r_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{p-1} & r_{p-2} & r_{p-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (8) \qquad r_p = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_p \end{bmatrix} \quad (9) \qquad \phi_p = \begin{bmatrix} \phi_{p1} \\ \phi_{p2} \\ \vdots \\ \phi_{pp} \end{bmatrix} \quad (10)$$

r_i：時間ずれiの自己相関係数

ϕ_{pi}：AR(p)モデルのϕ_i

ϕ_pを(7)式から求めるための有効な計算方法がDurbinによって与えられている。それによると

$$\phi_{kk} = \left(r_{k+1} - \sum_{j=1}^{k-1}\phi_{k-1,j}\, r_{k-j}\right) \Big/ \left(1 - \sum_{j=1}^{k-1}\phi_{k-1,j}\, r_j\right) \quad (11) \qquad \phi_{k,j} = \phi_{k-1,j} - \phi_{kk}\,\phi_{k-1,k-j} \quad (12)$$

であるから，$k=2$の最も簡単なものについて解をもとめれば，任意のpについても容易に解がもとめられる。

このようにして求められたϕ_pの最後の要素ϕ_{pp}は，時間ずれpに対する偏自己相関係数であることがわかっているから，その値をpの値に対応させてプロットして中けば，求めるグラフが得られる。そして，そのグラフにおいて，ϕ_{11} ～ ϕ_{pp} まではある程度の大きさの値があったものが，$\phi_{p+1,\,p+1}$ 以降急激に0に近くなってしまっていることが認められた場合，そのときのpをもってpの値とするのである。

次に，W_tの自己相関係数グラフにおいて，時間ずれqに対応する点まではある程度の大きさの値があり，$q+1$以降急に0に近い値にまで値がおち込んでいたならば，このW_tに対しMA(q) モデルを採用する．又，最初のmなる時間ずれまでは，ある程度の大きさがあり，それ以上の時間ずれに対しては指数関数的に，あるいは0点を中心に振動しながら減少しているような場合には，W_t に対しARMA(p,q) モデルを考える。ここで，p，qは $q-p=m$ (13) を満たす値で，通常 $p\leqq 2$，$q\leqq 2$ の範囲で決定する。

なお，上述の判断過程で，自己相関係数および偏自己相関係数を事実上0か否かを判定するためには，Bartlett の公式 $\sigma(r_k)\fallingdotseq\frac{1}{\sqrt{n}}\{1+2(r_1^2+r_2^2+\cdots\cdots+r_q^2)\}^{\frac{1}{2}}$ $k>q$ （MA(q)に対して） (14)

$\sigma(\phi_{kk})\fallingdotseq\frac{1}{\sqrt{n}}$ $k>p$ （AR(p)に対して） (15) 但し，n：データ数

を利用し，それぞれのグラフで0を中心に，例えば $2\sigma(r_k)$，$2\sigma(\phi_{kk})$ の範囲を考え，その中にr_k あるいはϕ_{kk}が入っていれば，事実上0とみなすという方法をとる。

4．モデルにおけるパラメータの決定

W_tの時系列を考えるものとすれば，次の3つの場合について考察すればよいことがわかる。

(a) AR(p)モデル　この場合については，式(7)を解けばよく，すでに述べた。

(b) MA(q)モデル　このモデルを利用することにより $r_k=(-\theta_k+\theta_1\theta_{k+1}+\theta_2\theta_{k+2}+\cdots\cdots+\theta_{q-k}\theta_q)/(1+\theta_1^2+\theta_2^2+\cdots\cdots+\theta_q^2)$ $k=1,2,\cdots\cdots,q$ (16) な方程式が導かれるから，このq次非線形方程式を解いて，θ_1 ～ θ_q を決定する。

(C) ARMA(p,q)モデル　このモデルを利用すると $r_{q+i}=\phi_1 r_{q+(i-1)}+\phi_2 r_{q+(i-2)}+\cdots\cdots+\phi_p r_{q+(i-p)}$ $(i=1,2,\cdots\cdots,p)$ (17) よりまずϕ_1 ～ ϕ_pを求める。次に $\phi(B)W_t\,(=W_t')$ なる時系列を考え，これについて自己相関関数 C_0' ～ C_q' を求める。しかる後，$\sigma_a^2=C_0'/(1+\theta_1^2+\cdots\cdots+\theta_q^2)$ (18)
$\theta_j=-(C_j'/\sigma_a^2)+\theta_1\theta_{j+1}+\theta_2\theta_{j+2}+\cdots\cdots+\theta_{q-j}\theta_q$ (19) を解いて，θ_1～θ_qを決定する。

なお，θ_0は普通0とおかれるが，W_tの平均値を求め，それと式(14) の偏差を比較して最終的な判断を下す。

5．パラメータの修正

最尤推定法の考え方に従って上で求めたϕ，θの値を修正するが，そのためには結局 $S(\phi,\theta)=\sum_{t=1}^{n}a_t^2(\phi,\theta)$ (20) を最小にするように修正することになる。但し，式(20)はARMA(p,q)モデルに対応させて書いたもので，AR(p)，MA(q) モデルについては，θあるいはϕのいずれか一方が存在しないことはいうまでもない。さて，$a_t(\phi,\theta)$の系列を計算するにあたり，式(1)の後退過程 $\phi(F)W_t=\theta(F)e_t$ (21) を利用する。一般に，$t>n-p$ なるtについて$e_t=0$とおき，W_tのn個の時系列データを使って式(21)からe_{n-p}，e_{n-p-1}，$\cdots$，e_1 をもとめる．次にそのeデータを使って W_{-j} の期待値$[W_{-j}]$ $(j=0,1,2\cdots)$を事実上$[W_{-J-1}]\fallingdotseq 0$ となるところまで求める（そのとき，$[e_{-j}]$はすべて0とおく）。次に，$[a_{-j}]=0$ $(j>J)$ とおき，式(1)を使って$[a_t]$時系列をもとめる。このようにして $\sum_{t=-J}^{n}[a_t(\phi,\theta)]^2$が計算されるので，パラメータ$\phi$，$\theta$の値を少しずつ変えながら$S(\phi,\theta)$を最小にする$\phi$，$\theta$を最終的にみつけ出すのである。

6．交通量の予測

Z_{t+k}を予測するためには，W_{t+l}を予測すれば十分である。W_{t+l}の予測値$\hat{W}_{t+l}(l)$は$l=1$～kの順に，既に得られているW_t，W_{t-1}，$\cdots$ はその値を，a_{t-j}は $a_{t-j}=W_{t-j}-\hat{W}_{t-j-1}(1)$ (22) を，a_{t+j} は0をそれぞれ用いて，式(1)により計算して中けばよい。

〔参考文献〕 1) 黒谷：カルマンフィルター理論を用いた道路交通状態の推定と予測
2) Box & Jenkins：Time Series Analysis　3) Eldor：Demand Predictors for Computerized Freeway Control System