IV-151 交通状態の推定におけるInformation Square Root Filterの適用性について

信州大学大学院　学生員　○木田川 誠司
信州大学工学部　正員　奥谷 巖

1，はじめに

道路網において適確に交通制御を行なうには、各リンクの交通状態を完全に把握しなければならない。しかしその情報源となる車両感知器で道路を完全に網羅する事は、経済的制約その他から困難であるため、感知器の設置されているリンクの交通状態をもとに、感知器の設置されていないリンクの交通状態を推定する必要がある。推定の一手法として，筆者のうちの1人によりカルマンフィルター理論を適用する方法が提案されているが、カルマンフィルターには、推定誤差分散マトリックスの対称性が失われたり、対角要素が負になるなどの数値計算上の問題に遭遇する事がある。本研究では、推定誤差分散マトリックスにマトリックスの平方根の概念を導入したInformation Square Root Filter（ISRF）を推定問題に適用し、その適用性について考察するとともに、カルマンフィルターによるものとの比較検討も試みるものである。

2，推定式とISRF

$x(t)$を各リンクの交通状態量よりなるn次元ベクトル、$y(t)$を$x(t)$の観測量よりなるr次元ベクトルとし，そのシステム方程式を次のように与える。

状態方程式　$x(t+1)=\phi(t)x(t)+w(t)$ ……(1)

観測方程式　$y(t+1)=\theta(t+1)x(t+1)+v(t)$ ……(2)

ここで、ϕ：$n\times n$遷移マトリックス，θ：$r\times n$変換マトリックス，$w(t)$・$v(t)$：誤差ベクトルを表わす。

$$\phi(t)=\begin{bmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) \cdots & f_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(t) & \cdots\cdots & f_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

$\theta(t)$の要素

$$a_{ij}=\begin{cases} 1：x_jが実際に感知器で観測されており、それがy_iとして定義されるとき \\ 0：そうでないとき \end{cases}$$

推定誤差分散マトリックスを、データ処理段階：$\Sigma(=S_+S_+^T)$，予測段階：$\Sigma(=SS^T)$，$w(t)$，$v(t)$の分散共分散マトリックスをそれぞれ$R_w(=WW^T)$，$R_v(=VV^T)$で表わすものとする。ISRFによる$\hat{x}(t)$を求める漸加式は下のように与えられる。

$$b(t)=S^{-1}(t)\hat{x}(t) \quad \cdots\cdots(3)$$

$$T\begin{bmatrix} S^{-1}(t) \\ \hdashline V^{-1}(t)\theta(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} S_+^{-1}(t) \\ \hdashline 0 \end{bmatrix} \ (4) \qquad T\begin{bmatrix} b(t) \\ \hdashline V^{-1}(t)y(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_+(t) \\ \hdashline e(t) \end{bmatrix} \ (5) \qquad S_+^{-1}(t)\hat{x}_+(t)=b_+(t) \ \cdots\cdots(6)$$

$$\tilde{T}\begin{bmatrix} W^{-1}(t) & 0 \\ \hdashline S_+^{-1}(t)\phi^{-1}(t) & S_+^{-1}(t)\phi^{-1}(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F(t+1) & G(t+1) \\ \hdashline 0 & S^{-1}(t+1) \end{bmatrix} \ (7) \qquad \tilde{T}\begin{bmatrix} 0 \\ \hdashline b_+(t) \end{bmatrix} \ \begin{bmatrix} a(t+1) \\ \hdashline b(t+1) \end{bmatrix} \ (8)$$

$$S^{-1}(t+1)\hat{x}(t+1)=b(t+1) \quad \cdots\cdots(9)$$

ここで，T，$\tilde{T}$はそれぞれデータ処理段階，予測段階のHouseholder Operatorを示している。

具体的計算手順は、（ステップ1）（3）式で，$S^{-1}(t_0)$，$\hat{x}(t_0)$を初期値として与えて，$b(t_0)$を求める。

（ステップ2）（4）式よりT，$S_+^{-1}(t_0)$を求め，それを用い，（5）式より$b^+(t_0)$を求める。

（ステップ3）（6）式より$\hat{x}_+(t_0)$を求める。

（ステップ4）（7）式において（ステップ2）と同様に$\tilde{T}$，$b_+(t_0)$を求め，それを用い，（8）式より
$b(t_0+1)$を求める。$t_0\to t_0+1$として（ステップ2）に戻る。

ここで用いられたHouseholder Operatorは、被作用マトリックスと等しい大きさを持つ正方マトリックスで，直交マトリックスであり、被作用マトリックスを三角化する性質を持つ。被作用マトリックスをA，そ

の要素a_{ij}として、計算方法を記述する。$T^{-1}=T_1T_2\cdots T_p$ …(10)，$T_i=E-2w_iw_i^T$ …(11)（w_i：列ベクトル 但し $w_i^Tw_i=1$とする。）で表わされるとすると、T_iは直交マトリックスとなる。

（ステップ1）$A=(T_1T_1)A=T_1(T_1A)=T_1A_1$ …(12) このとき A_1の(1,1)要素（λ_1とする）を除き、第1列が0となるようにT_1を定めるとする。いまA_1の第1列を$'A_1$と表わすとすると、

$w_1=\gamma_1('A-\lambda_1 e_1)$ (13) よりT_1が決定される。ここに$\lambda_1=\pm\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_{i1}^2}$ (14) $e=[1\ 0\cdots 0]^T$

$\gamma_1=1/\sqrt{2\lambda_1(\lambda_1-a_{11})}$ (15)（但し、$sgn(\lambda_1)=-sgn(a_{11})$）上述までの段階で下のようになる。

$$A=T_1A_1=T_1\begin{bmatrix}\lambda_1 & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a'_{1p}\\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(16)$$

（ステップ2）$A_1=(T_2T_2)A_1=T_2(T_2A_1)=T_2A_2$ (17) T_2の決め方として、A_2の第1列がA_1の第1列のままに保たれるようにし、かつ(2,2)の要素（λ_2とする）より下の要素を0にするように定めるとする。まずA_1の第1列に一致させるには$(w_2)_1=0$ とすれば良い。

$$A_2=T_2A_1=\begin{bmatrix}1 & 0\cdots 0\\ 0 & \\ \vdots & B\\ 0 & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & a'_{12} & a'_{13}\cdots a'_{1p}\\ 0 & & \\ \vdots & C & \\ 0 & & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & a'_{12} & a'_{13}\cdots a'_{1p}\\ 0 & & \\ \vdots & BC & \\ 0 & & \end{bmatrix}\ (18) \qquad BC=\begin{bmatrix}\lambda_2 & \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \end{bmatrix}\ (19)$$

のように定める事になるが，ここでは既知であるので（ステップ1）と全く同様な計算を行なえば良い。

（ステップ3）以上の様な操作をP回繰返すと最終的に以下のようにTが得られる事になる。

$$A=(T_1T_2\cdots\cdots T_p)\begin{bmatrix}\lambda_1 & a'_{12} & & a'_{1p}\\ 0 & \lambda_2 & & \\ \vdots & 0 & & \lambda_p\\ \vdots & \vdots & & 0\\ 0 & 0 & & 0\end{bmatrix}\begin{matrix}\}\,p\\ \\ \}\,n-p\end{matrix}=T^{-1}\begin{bmatrix}\lambda_1 & a'_{12} & & \\ 0 & \lambda_2 & & \\ \vdots & 0 & & \lambda_p\\ \vdots & \vdots & & 0\\ 0 & 0 & & 0\end{bmatrix}\quad\cdots(20)$$

次に、$P=SS^T$（S：三角マトリックス）なる作用をする Cholesky Decomposition について簡単に記す。これは首座行列を利用することにより、対角要素以上が0である三角マトリックスSの要素s_{ij}は、一般に

$$s_{ji}=\frac{p_{ij}-\sum_{k=1}^{i-1}s_{ik}s_{jk}}{s_{ii}}\quad(21)\qquad s_{ii}=\sqrt{p_{ii}-\sum_{k=1}^{i-1}s_{ik}^2}\quad(22)$$

より求められる。

3，ISRFによるパラメータの同定

2によりシステムは記述できたが，実際には $\Phi(t)$が未定なので，計算を進める事ができない。そこで，感知器の設置されていないリンクの交通状態量も含め，交通状態ベクトルの要素であるすべてのリンクの交通状態量を1日観測し，システムの動特性を調べる。

$$\Lambda(t)=\begin{bmatrix}x^T(t) & & \\ & x^T(t) & \\ & & \ddots\ x^T(t)\end{bmatrix}\qquad h(t)=[f_{11}(t)f_{12}(t)\cdots f_{1n}(t)f_{21}(t)\cdots f_{nn}(t)]^T\qquad x(t+1)=z(t)$$

とすると(1)式は $z(t)=\Lambda(t)h(t)+w(t)$ (23)となり，パラメータベクトルhの観測方程式と見做すことができる。そこで仮想的に $h(t+1)=\Psi(t)h(t)+e(t)$ (24)なるシステムを考えると，(23)，(24)は(1)，(2)と対応しているので ISRF ルゴリズムを利用して $h(t)$ 即ち $\Phi(t)$ を求める事ができる。2日目以降は，以上によって決定された$\Phi(t)$を固定して交通状態量$x(t)$を逐時計算することにより，感知器の設置されていないリンクの交通状態量を推定する。

〈参考文献〉 奥谷巌「カルマンフィルターによる交通状態予測の諸手法」 昭和54年研究発表講演概要集

Discrete Square Root Filtering : A Survey of Current Techniques

P.G.Kaminski, etal : IEEE Trans Automatic Contr vol AC-16 NO.6 pp727 (1971)