

九州大学工学部 学生員 永尾 祐治

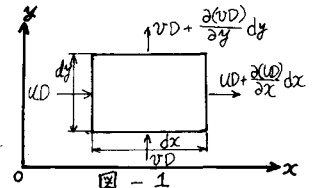
九州大学工学部 正会員 樗木 武

九州大学工学部 学生員 河野 雅也

1. まえがき 都市における人口動態は、周知のごとく、自然増と社会増に大別される。このうち、自然増に関しては、各地域の人口や年齢構成等によりある程度推察することが可能であり、また、時系列的な分析により把握することも困難ではない。一方、社会増は、さらに他地域からその地域へ流入する人口と、自地域内で流動する人口とがある。前者は、その地域の地域構造や、全体的な経済変動等による影響を受けるもので、自地域内の人口動態と性質を異にする。また後者は、例えば都心から郊外に住宅立地を求めることなどにより移動する人口動態成分であり、各ゾーンの特質により特徴づけられるものと考えられる。

本研究は、都市人口動態を上述の成分に分け、自然増、及び社会増のうち他地域からの流入に関しては、外生的な負荷として取り扱った上で、自地域内の各ゾーンにおける人口動態をポテンシャル・フロー的に把握するための解析理論の確立を企図するものである。

2. 解析理論 図-1のように、対象地域に基準直交座標系 x, y を導入し、その微小要素 $dx dy$ 内の人口 $D dx dy$ に対する出生、死亡、并外部流入と境界よりのポテンシャル・フロー的な人口移動とで、人口の流入に関する収支を考えれば、次の連続方程式が得られる。



$$-\frac{\partial(uD)}{\partial x} - \frac{\partial(vD)}{\partial y} + (\alpha - \beta + \gamma)D = \frac{\partial D}{\partial t} \quad (1) \quad \text{ここに } D(\text{人}/\text{km}^2): \text{居住人口密度, } u, v(\text{m}/\text{年}): x, y \text{ 方向の人口移動速度成分, } \alpha(\text{1}/\text{年}): \text{出生率, } \beta(\text{1}/\text{年}): \text{死亡率, } \gamma(\text{1}/\text{年}): \text{并外部流入率}$$

式(1)の人口移動速度成分 u, v は、地下水流れのDarcy則類似概念と、式(1)の解析上の簡易化とを配慮して、次の式(2)で仮定できるものとする。 $u = -\frac{R_x}{D} \frac{\partial D}{\partial x}, v = -\frac{R_y}{D} \frac{\partial D}{\partial y}$ — (2) (ここに R_x, R_y は人口移動性係数と仮ける) すなわち、後述のように、 R_x, R_y を各要素毎に変化させて調整する計算法をとることを踏えると、 u, v に関して、式(2)を仮定することも十分妥当であると考えられる。

式(2)を式(1)に代入すれば、本論の基礎微分方程式である式(3)が、次のように得られる。

$$R_x \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} + R_y \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} + (\alpha - \beta + \gamma)D - \frac{\partial D}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

式(3)を直接解くことは、境界の複雑性、 R_x, R_y の局所的変化からして困難であるため、ここでは式(3)に対する汎関数として式(4)を仮定する。 $\Pi = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} (R_x \left(\frac{\partial D}{\partial x} \right)^2 + R_y \left(\frac{\partial D}{\partial y} \right)^2) - (\alpha - \beta + \gamma)D \right] + \frac{\partial D}{\partial t} d\Omega \quad (ここに \Omega: \text{解析領域})$ — (4)

式(3)の境界条件としては、次の2条件が考えられる。 (i) 境界で人口密度が既知 D_0 である。 $D = D_0$ — (5)

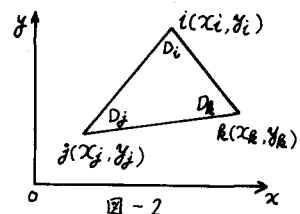
(ii) 境界を介して人口の移動量が押えられる。 $-uD_x - vD_y + \gamma = 0 \quad \therefore R_x \frac{\partial D}{\partial x} + R_y \frac{\partial D}{\partial y} + \gamma = 0$ — (6)

ここに (R_x, R_y) : 境界線に対する辺上の法線の x, y 軸に関する方向余弦、 γ : 境界単位当りの既知流出量なお(1)の条件のときは、式(4)に境界項として $\int_{\partial \Omega} D ds$ (ここに $\partial \Omega$: 境界) を付加することになる。

さて、図-2に示すように、考察対象地域を三角形要素で切り、要素内人口密度を、 x, y による一次式と仮定する。 $D = [1 \ x \ y] [a_0 \ a_1 \ a_2]^T = \mathbf{x} \mathbf{a}$ — (7)

ここに a_0, a_1, a_2 は、一次の式により定まる定数である。

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_i \\ D_j \\ D_k \end{pmatrix} = \mathbf{P}^T \mathbf{D} \quad (8) \quad \left(\begin{array}{l} \text{但し, } (x_i, y_i) \text{ 等は基準直交座標系} x, y \text{ に対する三角形頂点座標値, } D_i \text{ 等は、} \\ \text{三角形頂点} i \text{ 等における人口密度} \end{array} \right)$$



式的に於いて、その変分方程式を求めると次の式(9)を得る。

$$\left\{ \frac{\partial \pi}{\partial D} \right\}^e = \left\{ R_x \frac{\partial D}{\partial x} \left(\frac{\partial D}{\partial x} \right)^e + R_y \frac{\partial D}{\partial y} \left(\frac{\partial D}{\partial y} \right)^e - (\alpha - \beta + \gamma) D \left\{ \frac{\partial D}{\partial D} \right\}^e + \frac{\partial D}{\partial t} \left\{ \frac{\partial D}{\partial D} \right\}^e \right\} \quad (9) \quad (D \text{ は } D_0 \text{ 等を示す})$$

式(7)及び式(8)を式(9)に代入の上、式(9)の各項を計算すれば、次式を得る。

$$\left\{ \frac{\partial \pi}{\partial D} \right\}^e = \left(\frac{R_x}{4\Delta} B - \frac{R_y}{4\Delta} C - \frac{(\alpha - \beta + \gamma)}{48\Delta} E \right) D^e + \frac{E}{48\Delta} \frac{\partial D^e}{\partial t} \quad (10)$$

ここに、 B, C, E : 三角形要素頂点の座標 (x_i, y_i) 等によって構成されるマトリックス、 Δ : 三角形の面積

$$\text{ここで } \frac{R_x}{4\Delta} B + \frac{R_y}{4\Delta} C - \frac{(\alpha - \beta + \gamma)}{48\Delta} E = G, \quad \frac{E}{48\Delta} = H \text{ とおけば、} \left\{ \frac{\partial \pi}{\partial D} \right\}^e = G D^e + H \frac{\partial D^e}{\partial t} \quad (11)$$

よって解析領域全体で集積すると次式が得られる。 $G D + H \frac{\partial D}{\partial t} = Q \quad (12)$

ここに G, H : 領域全体で各々 G, H を集積したもの、 D : 領域全体の D のベクトル

境界項 $\int_C \delta p ds$ については、2頂点間で D が直線変化する、 G がその面にそって一定であるものと仮定することにより次のように得られる。 $\left\{ \frac{\partial \pi}{\partial D} \right\}^e (\int_C \delta p ds) = \begin{cases} \frac{G}{2} L \\ \frac{H}{2} L \end{cases}$ (ここに L : 境界長)

さて式(12)に対して Crank-Nicolson 法を適用するものとする。すなわち式(12)を $(t + \varepsilon \Delta t)$ において立てて計算すると、式(13)が得られる。 $(\varepsilon G + \frac{1}{2\Delta t} H) D^{tot} = -\{(-1-\varepsilon)G + \frac{1}{2\Delta t} H\} D^t \quad (13)$ (ここに ε は $0 \leq \varepsilon \leq 1$ なる定数)

式(13)が本問題解析の基本連立方程式となるものであり、当該時間段階の境界密度や出生、死亡、村外部流入率及び前時間段階の人口密度が与えられれば、本式を解くことにより、 $\varepsilon \Delta t$ 時間後の各要素頂点の人口密度が求められることになる。

R_x, R_y については、具体的な数値を与えることは難しいので、これを次のように算定する。すなわち式(11)を、 $\left\{ \frac{\partial \pi}{\partial D} \right\}^e = \frac{1}{4\Delta} [B \ C] \{ \varepsilon D^{tot} + (-1-\varepsilon) D^t \} - \frac{(\alpha - \beta + \gamma)}{48\Delta} E D^{tot} + (-1-\varepsilon) D^t + \frac{E}{48\Delta} \frac{1}{\Delta t} (D^{tot} - D^t) \quad (14)$

と変形し、全体で集積すると、式(14)が得られる。 $A K + Q = 0 \quad (15)$ ここに A : 式(14)の $\left\{ \frac{\partial \pi}{\partial D} \right\}^e$ の係数マトリックスを全体で集積したもの、 Q : 式(14)の2項と3項の和を全体で集積したもの、 K : (R_x, R_y) で構成されるベクトル
式(15)は、 R_x, R_y を未知数とする連立方程式であるが、未知数 R_x, R_y の数は、一般に式の数より少ない。したがって、最小二乗法等により、 R_x, R_y が求められることになる。以上のようにして、各要素頂点の人口密度が求まると式(15)を用いて三角形要素内全体を積分し、要素の将来人口の予測値が求められることになる。

3. 適用例 福岡市南区及び中央区の一部を例として示せば、次のとおりである。すなわち国勢調査にもとづき、昭和45年度及び50年度の人口密度より、式(15)を用いて、 R_x, R_y を算出した。その結果は、表-1に示すとおりであり、これらを用いて昭和45年度のデータから、昭和50年度における人口密度の計算値を算出し、昭和50年度のデータと比較対照すれば、表-2に示すとおりで、表中の値は、境界密度を与える点を除いた残りの点の値を示している。また表-2の値によるデータと計算値の平均、標準偏差及びその相関係数を示したのが表-3でこれによると、データと計算値の間にかなり高い相関が得られており、本論の妥当性を立証するものである。

表-1 R_x, R_y の算定値

単位: $\text{km}^2/\text{年}$

R_x, R_y に対する 分割地域	1	2	3
	R_x 2.777 $\times 10^4$ R_y -2.419	R_x -2.369 R_y -5.302 $\times 10^4$	R_x 3.077 R_y -5.765 $\times 10^4$
4	R_x -1.752 $\times 10^4$ R_y 5.093	R_x 5.856 R_y 3.556	R_x -2.719 R_y 5.662 $\times 10^4$
	R_x -2.462 R_y 1.619	R_x -1.701 $\times 10^4$ R_y -7.212	R_x -7.007 R_y -3.560
10	R_x 7.498 $\times 10^4$ R_y 1.814	R_x -1.480 R_y -9.712	R_x 2.021 $\times 10^4$ R_y -1.131
	R_x -5.127 R_y 6.692		
13			

表-3 データと計算値の平均、標準偏差及び相関係数

	デ-タ	計算値
平均	8302	7743
標準偏差	1924	1886
相関係数	0.927	
備考: デ-タと計算値には、境界密度は除いて いる。		

表-2 人口密度に関するデータ、計算値

単位: $\text{人}/\text{km}^2$

点	9	10	11	12	17	18	19
データ	8626	8478	8815	12533	9153	9274	7680
計算値	7737	7726	9676	12346	7443	8372	7396
22	23	24	26	27			
6333	7974	9929	6026	4804			
6579	7606	8028	5587	4423			