IV-81

都市高速道路の規模と料金水準
〜 消費者余剰最大に関する拡張経路の終点の意義 〜

岡山大学　正員　○浅井　加寿彦
〃　〃　明神　証
復建調査設計(株)　山崎　孝

1．まえがき

都市内有料高速道路を建設する場合について，社会的に最適な道路規模と料金水準の決定を収支均等という制度的制約を前提として考えて来た。[1] これは，最適化規準として消費者余剰最大を考え，収支均等条件下の拡張経路の終点とその最大があると仮定した山田の考え方[2]に従って最適解の導出を行った。本文は，この山田の仮定を説明して来たラグランジュの乗数法が特異点のときを扱っていることを示し，別の方法によって山田の仮定の妥当性を説明する。また，最適化規準として収入最大について考え，最適解の導出を行う。

2．拡張経路の終点と消費者余剰最大

都市高速道路の最適解を導出するにあたり，山田は問題を単純化してモデルの設定を行っており[2]，ここでも同様の取扱いをする。さて，高速道路への転換対象交通量Xは，道路規模Sが大きくなるにつれて最初は逓増的についで逓減的に増加する規模の関数と考えられる。〔$X=X(S)$〕　ところで，ある規模Sについて料金水準を上げて行くと，転換量（需要量）qは減少するので，転換率Fは料金Pの関数と言える。

$$q/X(S)=F\equiv F(P) \qquad (1)$$

これより，次のように需要関数を表わす。

$$q=F(P)\cdot X(S)\equiv q(P,S) \quad \text{or} \quad P=f(q,S) \qquad (2)$$

ところで，サービス総費用（建設費，維持管理費等）Cは，道路規模の増大につれて増加するもので，建設費が大部分を占めるため規模の関数と考えられる。〔$C=C(S)$〕　そこで，自動車一台当りの平均費用πは，

$$\pi=C(S)/q \qquad (3)$$

以上の需要曲線と平均費用曲線は，道路規模Sの変化に応じて図−1のように各曲線が描かれる。相対応する2つの曲線の交点もしくは接点は，収支均等条件を満足する均衡点であり，その均衡点の軌跡が拡張経路である。山田は，最適化規準として消費者余剰最大を考えた場合，拡張経路の終点で消費者余剰が最大になるという仮定をおこない，ラグランジュの乗数法を利用することによってその妥当性を説明した。しかし，(4)式の収支均等条件のもとで(2)式の需要関数より(5)式の消費者余剰を最大にする極値を求めるラグランジュ乗数法は，その極値を与える点が特異点であれば求めることができないものである。

$$P\cdot q=C(S) \quad \text{すなわち} \quad h(q,S)=q\cdot f(q,S)-C(S)=0 \qquad (4)$$

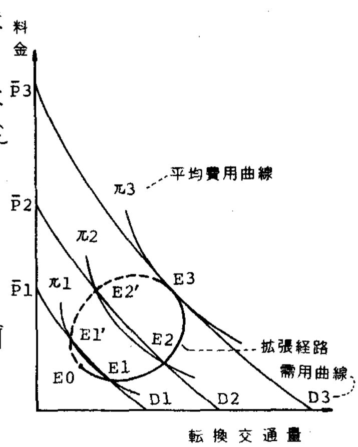
$$K=\int_0^q f(q,S)\,dq-C(S) \qquad (5)$$

すなわち，(4)式を陰関数定理より(6)式のように表わすとき，これが微分可能で(7)式が成り立たねばならない。

$$q=w(S) \qquad (6)$$

$$dq/dS=w'(S)=-h_S(q,S)/h_q(q,S) \qquad (7)$$

しかし，拡張経路の終点で次の2つの条件式を満足する。



図−1.

$$P = \pi \quad \text{および} \quad \partial P/\partial q = \partial\pi/\partial q \tag{8}$$

これによれば，(7)式の右辺の分母は，(4)式を用いて次のように零となる。

$$R_q(q,S) = f + q\cdot\partial f/\partial q = \pi + q\cdot\partial\pi/\partial q = C(S)/q + q\cdot(-C(S)/q^2) = 0 \tag{9}$$

すなわち，消費者余剰最大である拡張経路の終点は，特異点であることが言えるため，ラグランジュの乗数法からの説明は不適当である。そこで，拡張経路の終点で消費者余剰が最大になることを別の観点から説明を行う。道路規模がSからS+ΔS (ΔS>0)に変化したとき，消費者余剰の変化をΔKとすると，

$$\begin{aligned}\Delta K &= K(q+\Delta q, S+\Delta S) - K(q,S)\\ &= \left\{\int_0^{q+\Delta q} f(q,S+\Delta S)\,dq - C(S+\Delta S)\right\} - \left\{\int_0^{q} f(q,S)\,dq - C(S)\right\}\\ &= [\text{①の面積}] - [\text{②の面積}] \quad (\text{参照 図-2}) \qquad (10)\end{aligned}$$

ここで，ΔKをdKで表わすと次のように近似できる。

$$\begin{aligned}dK &= \int_0^{q} \partial f/\partial S\cdot dq\cdot dS - dp\cdot q\\ &= [\text{①'の面積}] - [\text{②'の面積}] \quad (\text{参照 図-3}) \qquad (11)\end{aligned}$$

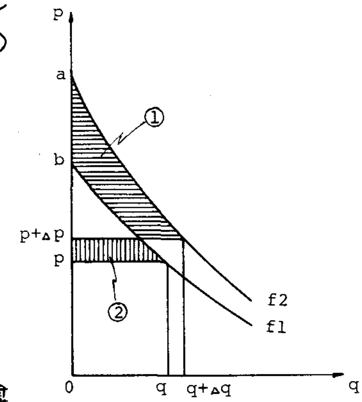


図-2.

ところで，上の2つの面積の大きさを比較するわけだが，$\overline{cd}-\overline{ce}>0$ なので，$\overline{ab}$ と $\overline{cd}$ の大小関係が問題となる。そこで，図-3において需要曲線 f_2 を $\overline{cd}$ だけ上方に平行移動した f_3 を考える。このとき，$\overline{ab}<\overline{cd}$ の場合，すなわち曲線 f_2 が曲線 f_3 より穏やかな形状となり $\partial f/\partial q$ の符号が変化することがあり，$\partial f/\partial q<0$ という条件に反する。すなわち，$\overline{ab}\geqq\overline{cd}$ の場合のみ成り立ち，$dK>0$ となる。つまり，拡張経路上で常に $\Delta K>0$ となるので，拡張経路の終点で消費者余剰最大となることが言える。

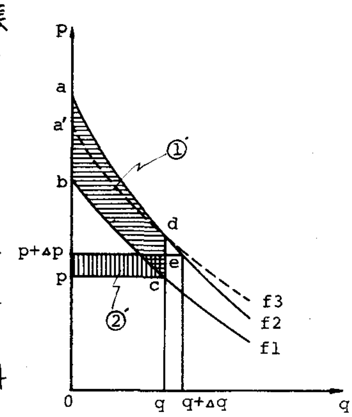


図-3.

3. 最適解の導出

最適解は拡張経路の終点で求められるが，その終点を満たす条件により最適解の導出を行う。ところで，拡張経路の終点とは，需要曲線と平均費用曲線が接している点であり，また収入最大経路上の点であるということ，つまり3曲線は1点で交わり，そこが最適解となることが判っている。そこで，これらの3曲線が1点で交わるという条件より道路規模および料金水準の最適解を導出することができる。

このようにして，収支均等という制約条件下で，最適解は次のような性質をもつ。すなわち道路規模は収支均等という制約条件を満足するかぎり，最大規模が最適解であり，このときの料金水準は料金収入を最大とするものである。

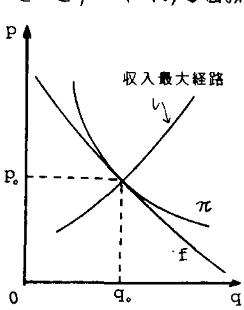


図-4.

<参考文献>

1) 明神証・浅井加寿彦；混雑費用を考慮した都市高速道路の料金と規模，第34回土木学会年次講演集，昭和54年.

2) 山田浩之；都市高速道路の最適規模と最適料金，高速道路と自動車，Vol.XI，No.19，1968，P.19~29