Ⅳ-68　　非零和協力ゲームとしてみた代替案評価

大阪府　正会員　○竹内慶行
京都大学　正会員　長尾義三
京都大学　正会員　黒田勝彦

1. はじめに

公共プロジェクトの実施は異なったグループや利害関係者に多くの異なった影響を及ぼす。このため代替案を評価する際には、これら利害関係者は評価主体であり、どの代替案が最も望ましいかということに関して競合や対立が生じていると考えられる。したがって、これら複数の評価主体の利害をいかに調整して代替案を決定するかという総合的な評価手法が望まれる。本研究では、代替案評価の際に、複数の評価主体がゲーム状態にあるととらえ、これを非零和協力ゲームで定式化した。そしてプロジェクト実施の際の合意形成のための調整方法についても考察した。

2. 非零和協力ゲーム[1)]としてみた代替案評価

2-1　ゲームの一般的構成

計画の評価主体をn人，評価する代替案をℓ個とすると、各評価主体による各代替案に対する評価値が得られる。（表-1）

表-1 各評価主体による各代替案に対する評価値

代替案 / 評価主体	a_1	a_2	---	a_j	---	a_ℓ
1	$U^1(a_1)$	$U^1(a_2)$		$U^1(a_j)$	---	$U^1(a_\ell)$
⋮	⋮	⋮				
k	$U^k(a_1)$	$U^k(a_2)$	---	$U^k(a_j)$	---	$U^k(a_\ell)$
⋮	⋮	⋮				⋮
n	$U^n(a_1)$	$U^n(a_2)$	---	$U^n(a_j)$	---	$U^n(a_\ell)$

各評価主体は、自分の期待効用を最大にするように代替案を決定する。各評価主体は、個々ばらばらで行動するよりもよい結果をもたらすことができるときには互いに提携して行動するであろう。このゲームの参加者の任意の提携は、ゲームの参加者の集合、$N=\{1,2,\cdots\cdots,k,\cdots\cdots,n\}$の部分集合として表わすことができる。いま$N$の部分集合を$S$とすれば、まず提携$S$にとって提携することによって得られる期待効用を考える。1つの提携Sにとって最悪の事態は、残りのすべての参加者（$N-S$という部分集合に属する参加者）が1つの提携$\bar{S}$を形成して、Sと$\bar{S}$が敵対することである。これは提携Sと提携$\bar{S}$との2人ゲームであり、Sが最悪の場合でも得ることのできる効用というのは、Sと$\bar{S}$との間のゲームのマックスミニ値である。

ここで提携Sと提携$\bar{S}$の2人ゲームによるペイオフを次のように定義する。（表-2）

(1) 提携S，$\bar{S}$ともに純粋戦略として代替案a_iを選んだときは、プロジェクトa_iは実施されるので、提携S全体として受けとる効用と提携$\bar{S}$全体として受けとる効用は、それぞれ

$$W^S(a_i,a_i)=\sum_{k\in S}U^k(a_i) \quad (1)$$

$$W^{\bar{S}}(a_i,a_i)=\sum_{t\in \bar{S}}U^t(a_i) \quad (2)$$

(2) 提携Sと提携$\bar{S}$が互いに異なる代替案を選んだときは、そのプロジェクトは実施されないので、

$$W^S(a_i,a_j)=0 \qquad (i\neq j) \quad (3)$$

$$W^{\bar{S}}(a_i,a_j)=0 \quad (4)$$

表-2 Sと$\bar{S}$の非零和2人ゲームのペイオフ表

Sの混合戦略	代替案	q_1		q_2		---	q_ℓ	
		a_1		a_2		---	a_ℓ	
p_1	a_1	$\sum_{k\in S}U^k(a_1)$	$\sum_{t\in\bar{S}}U^t(a_1)$	0	0		0	0
p_2	a_2	0	0	$\sum_{k\in S}U^k(a_2)$	$\sum_{t\in\bar{S}}U^t(a_2)$		0	0
p_3	a_3	0	0	0	0		0	0
⋮	⋮							
p_ℓ	a_ℓ	0	0	0	0		$\sum_{k\in S}U^k(a_\ell)$	$\sum_{t\in\bar{S}}U^t(a_\ell)$

（表頭：$\bar{S}$の混合戦略／代替案）

さて提携Sが混合戦略$\mathbb{P}$，提携$\bar{S}$が混合戦略$\mathbb{Q}$をとれば提携S全体としての期待効用は、(1)，(3)式より

$$EW^S(\mathbb{P},\mathbb{Q})=\sum_i\sum_j W^S(a_i,a_j)p_iq_j$$
$$=\sum_i\left\{\sum_{k\in S}U^k(a_i)\right\}p_iq_i \quad (5)$$

したがってS全体として少なくとも確保することのできる期待効用を$v(S)$とすると

$$v(S)=\max_{\mathbb{P}}\min_{\mathbb{Q}}\sum_i\left\{\sum_{k\in S}U^k(a_i)\right\}p_iq_i \quad (6)$$

またゲームの参加者全員が提携したときは、敵対するものがだれもいないから最大効用を得ることができる。

$$v(N)=\max_{P}\left[\sum_i\left\{\sum_{k\in N}U^k(a_i)\right\}p_i\right]=\max_{i}\left[\sum_{k\in N}U^k(a_i)\right] \quad (7)$$

2-2. 最適解

ゲームの参加者kの最終的な期待効用の分配をx^kとすれば、

$$X=\{x^1,x^2,\cdots\cdots,x^k,\cdots\cdots x^n\} \quad (8)$$

各参加者は、互いに協力した方が期待効用は大きいが、協力する以上は自分1人で手に入れ得る期待効用$v(k)$以上でなければ分配には合意しないから、分配x^kは次式を満たさねばならない。

$$x^k\geq v(k) \quad (k=1,2,\cdots\cdots,n) \quad (9)$$

また各参加者の分配の合計は、全参加者が提携したときに得ることのできる提携値$v(N)$に等しい。

$$\sum_{k\in N}x^k=v(N) \quad (10)$$

(9), (10)式を満たす分配のうち、公正な分配として、仁(Nucleolus)[2),3),4)]の解の概念を用いる。

いま、ある分配x^kが決まれば、そのとき提携Sとして得ることのできる総効用は、

$$x(S)=\sum_{k\in S}x^k \quad (11)$$

ところが提携Sは提携Sだけで行動したとしても少なくとも$v(S)$は保証されているから、その差$v(S)-x(S)$は、その分配に対する提携Sの不満である。そこで提携のうちで最大の不満を持つ提携を考え、その最大値が最小になるような分配を公正な分配とすれば、

$$\min_{X}\max_{S}\left[v(S)-x(S)\right] \quad (12)$$

2-3. 合意形成のための調整

最適解を実施するためには、評価主体間の調整が必要である。これはプロジェクト実施に際しての合意形成のための調整ともいえる。もともと全参加者が提携したときの提携値$v(N)$は、各評価主体の効用の和を最大にする代替案a_*を実施するとしたときの値であるから、そのとき各参加者が得たであろう期待効用$U^k(a_*)$と公正な分配としてきまった値x^kとの差をc^kとすると、これは調整される必要がある。

$$c^k=x^k-U^k(a_*) \quad (k=1,2,\cdots\cdots,n) \quad (13)$$

$c^k>0$ならば正の効用を受け取り、$c^k<0$ならば、正の効用を支払う。このとき提携内では$\sum_{k\in N}c^k=0$である。

このような調整のためには、補償や関連事業を行なうことが考えられる。

2-4. 仲裁による次善解

しかし、このような調整に合意されない場合がある。そのときは全評価主体の提携が成立しなかったと考えられる。このときは代替案が実施されるときに調整しなくてもよいように代替案の評価値そのものが公正な分配になっているような代替案を選ぶ。つまり、ある代替案a_jが選ばれたとすると評価主体全員の総期待利得は、

$$W_j(N)=\sum_{k\in N}U^k(a_j) \quad (14)$$

ここで代替案a_jを選んだときの各評価主体の評価値$U^k(a_j)$そのものを総期待効用$W_j(N)$の分配だと考える。すなわちこのとき公正な分配になる代替案は、

$$x_j^k=U^k(a_j) \quad (15)$$

$$\min_{j}\max_{S}\left[v(S)-\sum_{k\in S}x_j^k\right] \quad (16)$$

で求められる。数値計算例の詳細は、講演時に発表する。

参考文献

1. von Neumann, J. and O. Morgenstern; Theory of Games and Economic Behavior, Princeton University Press, Princeton New Jersey 1944
2. Schmeidler, D; The nucleolus of a characteristic function game, SIAM. Appl. Math. vol 17. No.6 pp1163~1170 1969
3. 鈴木光男；計画における仁と責任，東洋経済臨時増刊 1973
4. 鈴木光男；「ゲーム理論の展開」，東京図書