

E.N.ソイルデザインKK

正員 河村隆二

日本国有鉄道

正員 植木 博

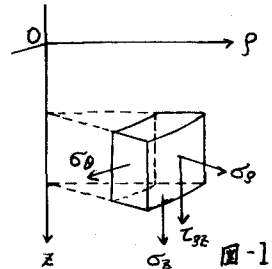
1 まえがき

タンク基礎等の地盤内における応力、変位に関する任意の点での定量的な表現が要求されている。

一方、工学以外の分野でも、ポテンシャル問題として、同様な問題がある。

ここでは円形等分布荷重が作用する半無限体内の応力及び変位を完全楕円積分及び完全楕円積分の変形を用いて

任意の点 P , Z で表現する。(図-1) 軸対称の場合には $Hankel$ 変換が有用となる。従来、Egorov と Harr は垂直方向応力 σ_z のみを完全楕円積分で表現した。ここでは σ_z のみならず、 σ_r , σ_θ , τ_{rz} , u_r , u_z を完全楕円積分ないし、完全楕円積分の変形で求めることができることを示す。



2 理論式

円形等分布荷重の場合、 $Hankel$ 変換を用いて Love により、各々次式が与えられている。(1), (2), (3)

$$\sigma_z = -Pa \int_0^\infty (z\xi + 1) e^{-z\xi} J_1(a\xi) J_0(p\xi) d\xi \quad \text{--- (1)}$$

$$\sigma_r = -Pa \left[\int_0^\infty (1 - z\xi) J_1(a\xi) J_0(p\xi) e^{-z\xi} d\xi + \frac{z}{p} \int_0^\infty J_1(a\xi) J_1(p\xi) e^{-z\xi} d\xi - \frac{(1-2\nu)}{p} \int_0^\infty J_1(a\xi) J_1(p\xi) \frac{e^{-z\xi}}{\xi} d\xi \right] \quad \text{--- (2)}$$

$$\sigma_\theta = -Pa \left[2\nu \int_0^\infty e^{-z\xi} J_1(a\xi) J_0(p\xi) d\xi - \frac{z}{p} \int_0^\infty J_1(a\xi) J_1(p\xi) e^{-z\xi} d\xi + \frac{(1-2\nu)}{p} \int_0^\infty J_1(a\xi) \frac{1}{\xi} J_1(p\xi) e^{-z\xi} d\xi \right] \quad \text{--- (3)}$$

$$\tau_{rz} = -Pa z \int_0^\infty e^{-z\xi} \xi J_1(a\xi) J_1(p\xi) d\xi \quad \text{--- (4)}$$

$$u_r = \frac{Pa(1+\nu)}{E} \left[(1-2\nu) \int_0^\infty J_1(a\xi) J_1(p\xi) e^{-z\xi} \frac{1}{\xi} d\xi - z \int_0^\infty J_1(a\xi) J_1(p\xi) e^{-z\xi} d\xi \right] \quad \text{--- (5)}$$

$$u_z = -\frac{Pa(1+\nu)}{E} \left[-2(1-\nu) \int_0^\infty J_1(a\xi) J_0(p\xi) \frac{e^{-z\xi}}{\xi} d\xi - z \int_0^\infty J_1(a\xi) J_0(p\xi) e^{-z\xi} d\xi \right] \quad \text{--- (6)}$$

ここに、 a : 半径、 p : 等分布荷重、 E : ヤング係数、 ν : ポアソン比

3 理論解

Neumann の加法定理と直交性を利用して、上記の ξ の積分を実行すると

$$\sigma_z = -p \left[\frac{1}{2} + \frac{\text{sign}(a-p)}{2} - \frac{z}{\pi \sqrt{z^2 + (a+p)^2}} \left\{ \frac{z^2 - a^2 + p^2}{z^2 + (a+p)^2} K_3(k) + \frac{a-p}{a+p} \Pi_0(m, k) \right\} \right] \quad \text{--- (1')}$$

$$\sigma_r = -p \left[\frac{1}{2} + \frac{\text{sign}(a-p)}{2} - \frac{z}{\pi \sqrt{z^2 + (a+p)^2}} K(k) - \frac{(a-p)z}{\pi(a+p)} \frac{1}{\sqrt{z^2 + (a+p)^2}} \Pi_0(m, k) - \frac{(a^2 - p^2 - z^2)z}{\pi \{z^2 + (a+p)^2\}^{3/2}} K(k) \right. \\ \left. - \frac{(1-2\nu)}{2} \left\{ \frac{1}{\frac{a}{p}} \right\} \frac{p \leq a}{p > a} + \frac{2a^2 z}{\pi(a+p)^2 \sqrt{z^2 + (a+p)^2}} \Pi_2(m, k) + \frac{2a^2 z}{\pi} \frac{1}{\{z^2 + (a+p)^2\}^{3/2}} R_3(k) \right] \quad \text{--- (2')}$$

$$\sigma_\theta = -p \left[2\nu \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\text{sign}(a-p)}{2} - \frac{z}{\pi \sqrt{z^2 + (a+p)^2}} K(k) - \frac{(a-p)z}{\pi(a+p)} \frac{1}{\sqrt{z^2 + (a+p)^2}} \right\} \right. \\ \left. + \Pi_0(m, k) \right\} + \frac{(1-2\nu)}{p} \left\{ \frac{1}{2} \left\{ \frac{p}{a} \right\} \frac{p \leq a}{p > a} - \frac{2a^2 p z}{\pi(a+p)^2 \sqrt{z^2 + (a+p)^2}} \Pi_2(m, k) \right\} - \frac{2a^2 z}{\pi} \frac{1}{\{z^2 + (a+p)^2\}^{3/2}} R_3(k) \right] \quad \text{--- (3')}$$

$$\tau_{rz} = -p \frac{6a^2 z^2 p}{\pi} \frac{1}{\{z^2 + (a+p)^2\}^{3/2}} R_5(k) \quad \text{--- (4')}$$

$$u_r = -\frac{p(1+\nu)}{E} \left[(1-2\nu) \left\{ \frac{1}{2} \left\{ \frac{p}{a} \right\} \frac{p \leq a}{p > a} - \frac{2a^2 p z}{\pi} \frac{1}{(a+p)^2 \sqrt{z^2 + (a+p)^2}} \Pi_2(m, k) \right\} \right. \\ \left. - \frac{4a^2 p z}{2\pi} \frac{1}{\{z^2 + (a+p)^2\}^{3/2}} R_3(k) \right] \quad \text{--- (5')}$$

$$u_z = \frac{P(1+\nu)}{E} \left[\frac{1}{2}(1+2\nu) \left\{ z + z \operatorname{sign}(a-P) \right\} + 2(1-\nu) \frac{1}{\sqrt{z^2 + (a+P)^2}} E(k) - \frac{1}{\pi} \left\{ z^2 - 2(1-\nu)(a^2 - P^2) \right\}^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{z^2 + (a+P)^2}} K(k) - \frac{z^2}{\pi} (1+2\nu) \frac{(a-P)}{(a+P)} \frac{1}{\sqrt{z^2 + (a+P)^2}} \Pi_0(m, k) \right] \quad (6')$$

ここに、 $K(k)$, $E(k)$, $\Pi_0(m, k)$ は通常の第一種、第二種、第三種完全楕円積分であり、 $K_3(k)$, $R_3(k)$, $R_5(k)$, $\Pi_2(m, k)$ は完全楕円積分の変形である。

$$K_3(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1-k^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} = \frac{1}{1-k^2} E(k)$$

$$R_3(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 2\theta}{(1-k^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} d\theta = \frac{4}{k^2} \left[(2-k^2) K(k) - 2E(k) \right]$$

$$R_5(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 2\theta}{(1-k^2 \sin^2 \theta)^{5/2}} d\theta = \frac{4}{3k^4} \left[(2-k^2) E(k) - 2K(k) \right]$$

$$\Pi_2(m, k) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 2\theta}{(1-m^2 \sin^2 \theta) \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} d\theta = \frac{4}{k^2 \pi^2} \left[\frac{(k^2 - m^2 k^2 + m^2)}{m^2} K(k) - \frac{(1-m^2) k^2}{m^2} \Pi_0(m, k) - E(k) \right]$$

$$\text{また } k^2 = \frac{4aP}{z^2 + (a+P)^2}, \quad m^2 = \frac{4aP}{(a+P)^2}$$

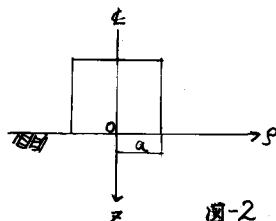


図-2

σ_z , σ_P , σ_θ , τ_{Pz} , u_P , u_z は任意の点 P , z に対し、厳密解が求められる。 σ_z に関しては Egorov⁵⁾ と Harr⁴⁾ によって求められた結果と一致している。これらの得られた結果を特に $P=0$ (center), $z=0$ (surface), 及び $P=a$ (radius) の場合に対して従来の結果と比較検討できる。^{6), 7)} (図-2) また、この結果は土質力学のみならず、工学以外のポテンシャル問題に適用が可能である。

4 応用例

タンクの場合の簡単な応用例を考えると

- 多層から成る砂層地盤の任意の P における沈下量は(6)'式を用いて、算定できる。
- リングコンクリートシェル下におけるタンク及び置換土の応力 σ_P と σ_θ は(2)'式及び(3)'式から求めることができる。
- 円錐台形盛土の地中応力 σ_z は(1)'式で半径 a を置き換え盛土高さまで積分することにより求められる。
- (1)'から(6)'式を用いて群タンクによる地中内の応力及び変位に関する任意の点におけるタンク相互間の影響を算定できる。
- (4)'式からタンク底板下におけるせん断力 τ_{Pz} を算定できる。

その他の場合にも(1)'式～(6)'式を応用することができる。(1)'式～(6)'式の詳細は土木学会論文集に投稿予定である。

5 参考文献

- 宮本博：三次元弾性論 裳華房
- 最上武雄，木村五：土質力学 技報堂
- Love, A. E. H.: The stress produced in a semi-infinite solid by pressure on part of boundary, Phil. Trans. Roy. Soc., London series A Vol. 228
- Harr, M. E.: Foundation of theoretical soil mechanics p86, McGraw-Hill
- Egorov, K. E.: Concerning the question of calculations for base under foundation with footings in the form of rings, Mekhanika Gruntov, Sb. Tran. No 34, Gosstroizdat, Moscow.
- 河村隆二他 タンク基礎における地盤内応力に関する問題点 土と基礎, 1978, 2
- Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N.: Theory of Elasticity p403 McGraw-Hill