## III-183　地盤の非線形性を考えたクイの水平抵抗に関する一計算法

基礎地盤コンサルタンツ(株)　正会員　水本邦男

1. はじめに　　クイの水平載荷試験から得られる荷重ー変位の関係は一般に非線形である。クイを線形弾性体と見做し得るならばこの非線形性は地盤の変形特性にその原因が存在するはずであるが、地盤反力の非線形性を考慮した解法の一つに非線形弾性地盤反力法がある。この方法は地盤反力($g$)、変位($y$)、および深さ($x$)の間に　$g = Kx^m y^n$　($K$, $m$, $n$は定数)　　(1)

の関係を仮定するのであるが、$n < 1$ であれば(1)式を用いて梁の微分方程式を解析的に扱うことは困難であり、また実験結果からK、m、nの値を簡単に見い出すことも困難である。さらに(1)式の妥当性を実験的検証を経て評価したものは筆者の知る限り、文献<1>だけである。文献<1>は地盤反力の関数形が近似的に式(1)の形で表わされることを示し、同時に式(1)を用いた梁の微分方程式の解析的取り扱いの困難さを相似法則を用いた独特の手法によって克服しているが(いわゆる港研方式である。)、その適用は　$m = 0$, $n = 0.5$、および $m = 1.0$、$n = 0.5$　の場合の二種類に限る。

さて文献<1>は砂、粘土を問わず地盤反力の変位依存性は　$n = 0.5$　で近似し得るという極めて興味深い実験結果を示しているが、その成立範囲(どの程度のクイ頭変位まで適用できるかなど)や、地盤条件、クイの剛性、形状、さらにはクイ頭の拘束条件など(筆者の想像ではあるが、これらの条件が異なれば　nの値も若干変わるのではないかと思っている。)によるK、mの値の決め方などまだ曖昧な部分も多い。そこで本稿ではこの点に留意して、地盤反力の関数形を(1)式で与えた場合のクイの挙動に関する必要な数値解の求め方、およびクイの水平載荷試験から、地盤反力の関数形を(1)式で近似した場合のK、m、nの算定法の概略を述べる。なお紙面の都合上、以下で述べる算定法の対象とする水平載荷試験は頭部自由端の場合である。そしてクイは半無限長と見做し得るものとする。

2. 数値解の求め方、および算定法に関する基礎的理論　　4階の微分方程式は一般に4個の任意定数をもつ。半無限長のクイを対象とすれば、これらの任意定数は通常、無限遠点でタワミ、およびタワミ角が0に収束すること、そしてクイ頭で与えられる二つの条件によって定められる。従って、無限遠点における二つの収束条件を満足し、さらにクイ頭における二つの条件のうち一つ(例えば変位)が不変であるならば、クイの挙動は他の一つの条件(例えばクイ頭でのタワミ角)によって一義的に定まる。このことは次の微分方程式についてもあてはめることができる。すなわち、

$d^4y/dx^4 = -x^m y^n$　において、$\lim_{x\to\infty} y \to 0$、$\lim_{x\to\infty} y' \to 0$　を満足し、さらに $y(0)=1$　であるならば、$y(x)$、$y'(x)$、$y''(x)$、$y'''(x)$　は　$y'(0)=\theta$　を与えることによって一意に定まる。

なお、このような条件を満足する特殊解を以後、基準解と呼ぶことにする。次に微分方程式の変換について述べよう。

いま、一つの基準解 $y(x)$、$y'(x)$、$y''(x)$、$y'''(x)$ に対して、$\eta$、$\lambda$ を定数として、

$Y = \eta y$, $X = \lambda x$　　(2)　　で基準解を変換すると、

$Y = \eta \cdot y(X/\lambda)$　　(3)　　　　$dY/dX = (\eta/\lambda)\cdot y'(X/\lambda)$　　(4)

$d^2Y/dX^2 = (\eta/\lambda^2)\cdot y''(X/\lambda)$　　(5)　　　　$d^3Y/dX^3 = (\eta/\lambda^3)\cdot y'''(X/\lambda)$　　(6)

$d^4Y/dX^4 = (\eta/\lambda^4)\cdot y''''(X/\lambda) = -(\eta^{1-n}/\lambda^{4+m})\, X^m Y^n$　　(7)

となる。すなわち変換された解は、

$d^4Y/dX^4 = -(\eta^{1-n}/\lambda^{4+m})X^m Y^n$　で与えられ微分方程式について、収束条件を満足し、さらに　$Y(0)=\eta$

$Y'(0)=(\eta/\lambda)\theta$ を満足する解である。このとき、$Y''(0)=(\eta/\lambda^2)\,y''(0)$，$Y'''(0)=(\eta/\lambda^3)\,y'''(0)$ であることは明らかである。よって基準解について、横軸に $\theta$，縦軸に $\theta$ に対応する $y'(0)$ もしくは $y'''(0)$ さらには $y''(x)$ の極値や変曲点の生じる位置など解析上必要と思われるいくつかの値を示すグラフが与えられれば、必要な数値解は容易に得ることができる。例えば、

$d^4Y/dx^4=(k/EI)X^mY^n$、 $d^3Y/dx^3\big|_{x=0}=P/EI$ $d^2Y/dx^2\big|_{x=0}=M/EI$， $\lim_{x\to\infty}Y\to 0$，
$\lim_{x\to\infty}Y'\to 0$ （EI、k、P、M は規知）の場合については基本的関係として

$\eta^{1-m}/\lambda^{4+m}=k/EI$ (8) $(\eta/\lambda^2)\cdot y''(0)=M/EI$ (9) $(\eta/\lambda^3)\cdot y'''(0)=P/EI$ (10)

を満足しなければならない．(8)，(9)，(10) 式から

$$\{k/(EI)^n\}\cdot M^{m+3n+1}/P^{m+2n+2}=\{y''(0)\}^{m+3n+1}/\{y'''(0)\}^{m+2n+2} \qquad (12)$$

の関係が得られるが、左辺の値は規知である。また右辺の値は $\theta$ によって定まるから、予め $\theta$ に対応する右辺の値を示すグラフが与えられていれば式(12)を満足する $\theta$ は求まる。$\theta$ が求まれば対応する $y''(0)$，$y'''(0)$ の値はグラフから読み取ることができ、$\eta$、$\lambda$ の値も直ちに求まる。よって必要な値は式(2)～(6)の関係に従って容易に求めることができる．このように基準解の整理は $\theta$ の値に対応する式(12)の右辺のように、予め必要性が予想されるものについても行なっておくと便利である． なお頭部固定の場合については最初から $\theta=0$ における諸種の値を用いれば良い。次に k，m，n の算定法を示す．

対象としているのはクイ頭自由であるが測定値として、クイ頭での変位 $Y_0$、タワミ角 $\phi_0$，荷重 $P_0$ は得られているものとする．このとき、クイ頭で成り立つ関係は

$Y(0)=\eta=Y_0$ (13) $dY/dx\big|_{x=0}=(\eta/\lambda)y'(0)=\phi_0$ (14)

$d^3Y/dx^3\big|_{x=0}=(\eta/\lambda^3)y'''(0)=P_0/EI$ (15) $\eta^{1-n}/\lambda^{4+m}=k/EI$ (16)

である．式(14)，(16)から $\lambda$ を消去し、式(13)を用いると、$Y_0$ と $\phi_0$ の関係として、

$$\log\phi_0=(3+m+n/4+m)\cdot\log Y_0+\log(EI/k)+\log\{y'(0)\} \qquad (17)$$

同様に、式(15)，(16)から、$P_0$ と $Y_0$ の関係として

$$\log P_0=(1+m+3n/4+m)\cdot\log Y_0+(1/4+m)\cdot\log(EI)^{1+m}\cdot K^3+\log\{y'''(0)\} \qquad (18)$$

が得られる。さて、地盤反力の関数形が近似的に $g=kX^mY^n$ で与えられたとするならば、自由端のもとではどのような $Y_0$，$\phi_0$，$P_0$ の値に対しても式(17)，(18)の関係は満足するはずである．さらに k、m，n は定数である。そして定まった m、n に対しては $y'(0)$，$y'''(0)$ もまた定数である．従って m，n の算定は両対数紙に（$\phi_0$，$Y_0$），（$P_0$、$Y_0$）をそれぞれプロットし、その勾配から容易に求めることができる．（ただし $m=1$ の場合は例外である．）すなわち、$\log Y_0-\log\phi_0$ および $\log Y_0-\log P_0$ 関係は完全な直線をなし、その勾配はそれぞれ（$3+m+n$）/（$4+m$），（$1+m+3n$）/（$4+m$） となるからである。m，n の値が定まれば式(14)または(15)から $\lambda$ の値は決まり、さらに式(16)から k の値も求まる。以上のように頭部自由の場合には k、m、n の値は極めて容易に求めることができるが、それ以外の場合はやや面到である。（頭部自由以外の場合については別の機会に述べることにする。）

3．おわりに、 筆者は $m=0$，1/8，2/8，……，7/8，8/8，$n=1/8$，2/8，……，8/8，のすべての組み合わせに対する基準解を求めてあるが（$\theta=0$～$-1.5$ 位まで），その求解法，解の特性もしくは求めた基準解の信頼性の評価法（特に収束条件の満足性について）などについては本稿では述べなかったが、これらのことは別の機会に詳細に述べることとする．最後に本研究を行なうに当たって御助言、御指導を賜わった東京都立大学、湯浅欽史助教授に対し、心からの感謝の意を表します．

文献<1> 篠原・久保 ： 杭の横抵抗に関する実験的研究（その1） 運輸技術研究所報告 Vol. 11 No. 6