

まえがき

内部自由境界問題の一種である凍結問題は、数値計算的にも、解の存在性・唯一性の意味から多種の方法で解かれているが、Fox¹⁾によるとつぎの4種の方法に大別される。i) front-tracking methods, ii) isotherm migration method, iii) enthalpy form methods, iv) method of variational inequalities. 第4の方法については既報の通りである。一相問題に対してこの方法は大変有効であるが、二相問題に対しては新しく導入した従属変数 freezing index の定義により、熱伝導率または熱伝達率が凍結前後の各相の内では定数で、かつ領域全体で一定でなければならないという制約がある。第1の方法は領域を移動しながら自由境界条件によって内部境界の位置を定め、その後温度分布を決定する方法であり、考え方としては最も単純であるが、凍結領域と融解領域が複雑に入り組む問題には適用不可能である。第2の方法は基本的には一次元問題に適用される方法である。空間座標を x , 自由境界の位置を $x = S(x)$ とし、新しい変数 $\xi = x/S(x)$ を導入することによって自由境界の位置を“固定”して解く方法である。ただしこの変数変換によって支配方程式は非線形となる。3番目の方法がここで述べる方法であり、新しい変数としてエンタルピー、すなわち単位体積当りの全熱容量を導入することによって自由境界条件を支配方程式の内に埋め込もうとするものである。材料の非線形性を含む多次元二相問題に対しては現在までのところ最も適切な方法であろう。この非線形な支配方程式の数値解析の手法として Rogers 等^{3), 4)}によって alternating phase truncation (APT) method が開発されている。ここでは更に Kirchhoff の変換を用いて支配方程式を線形化することを考える。

二相問題の定式化

n 次元内の有界開領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ が時刻 $t > 0$ において凍結部分 $\Omega_1(t) = \{x \in \Omega : \theta(x, t) < 0\}$ と未凍結部分 $\Omega_2(t) = \{x \in \Omega : \theta(x, t) > 0\}$ に分けられ、その境界すなわち自由境界の位置が $x = S(x)$ で与えられているとする。各相の比熱、熱伝導率をそれぞれ $C_i, R_i, i=1, 2$, 潜熱を L とすると支配方程式、境界条件、初期条件がつぎのように与えられる。

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & C_i \partial \theta / \partial t = \nabla \cdot (R_i \nabla \theta) \quad \text{for } x \in \Omega_i, t > 0, \\
 & \theta(x, t) = \hat{g}(x, t) \quad \text{for } x \in \partial \Omega_0, t > 0, \\
 & \partial \theta / \partial n = \hat{f}_i(x, t) \quad \text{for } x \in \partial \Omega_N, t > 0; \quad \partial \Omega = \partial \Omega_0 \cup \partial \Omega_N, \quad \partial \Omega_0 \cap \partial \Omega_N = \emptyset, \\
 & \theta(x, 0) = \hat{\theta}_0(x) \quad \text{for } x \in \Omega, \\
 & (-R_2 \nabla \theta^+ + R_1 \nabla \theta^-) \cdot \nabla S = L \quad \text{on free surface} \quad ; \quad \text{Stefan condition}
 \end{aligned}$$

ここで $\theta^+ = \max\{0, \theta\}$, $\theta^- = \max\{0, -\theta\}$ である。エンタルピー H をつぎのように定義する (Fig. 1 参照)。

$$(2) \quad H(\theta) = \int_0^\theta C(\tau) d\tau + L \delta(\theta), \quad \delta(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{if } \theta \geq 0 \\ 0, & \text{if } \theta < 0 \end{cases}$$

微分に関する chain rule を適用することによって支配方程式 $(1)_1$ は

$$(3) \quad \partial H / \partial t = \nabla \cdot (d_i \nabla H) \quad \text{for } x \in \Omega, t > 0,$$

とすることが判る。ここで $d_i = R_i / C_i, i=1, 2$, である。

また、もし比熱 C が温度 θ の指数型で与えられるならば、すなわち $C(\theta) = \theta^s$ の形で書けるとすると Dirichlet 境界条件 $(1)_2$ は

$$(4) \quad H(x, t) = \hat{g}^{s+1} / (s+1) + L \delta(\hat{g}) \equiv \hat{g} \quad \text{for } x \in \partial \Omega_0$$

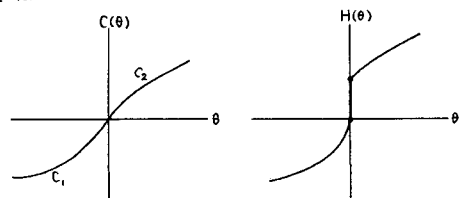


Fig. 1 Definition of Enthalpy

と変換される。初期条件(1)₄も同様にして

$$(5) \quad H(x, 0) = \hat{\theta}_0^{3/4} / s_{11} + \lambda \delta(\hat{\theta}_0) = \theta, \quad \text{for } x \in \Omega,$$

となる。これに対して Neumann 条件(1)₃は変換(2)によって非線形となる。たとえば $\hat{\theta}(x, t) = \text{constant}$ であれば、変換された Neumann 条件は

$$(6) \quad H^{-3/4} \partial H / \partial n = \text{const.} \quad \text{for } x \in \partial\Omega_N, t > 0$$

である。Stefan condition(1)₅は

$$(7) \quad \begin{aligned} H^- &= 0, \quad H^+ = \lambda, \\ (-d_2 \nabla H^+ + d_1 \nabla H^-) \cdot \nabla S &= \lambda \end{aligned}$$

と書き表わされる。

つぎに支配方程式(3)を線形化するために Kirchhoff 変換を試みる。これは

$$(8) \quad K(\theta) = \int_0^\theta k(\tau) d\tau$$

で与えられる。この変換によって方程式(3)は

$$(9) \quad \partial H / \partial t = \nabla \cdot \nabla K \quad \text{for } x \in \Omega, t > 0$$

となり、これは明らかに線形方程式である。ただし H と K は線形独立ではなく、Fig. 2 で示すような関係がある。境界および初期条件は上記エンタルピー変換と同様に求まる。

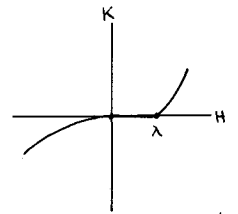


Fig. 2 Kirchhoff Transformation

上記の、一般的には非線形な偏微分方程式を適当な方法で離散化して H または K の近似値を求めるわけであるが、これらの離散値より温度 θ を得るには(2)または(3)式の逆変換を用いる。すなわち Fig. 1 または Fig. 2 を利用すれば容易に求まるわけである。

数値計算の方法

Dirichlet 問題(3), (4), (5), (7)の数値解析手法について述べる (APT method)。Neumann 問題については非線形境界条件(7)を処理する別のアルゴリズムが必要である。

I. 時刻 t における差分または有限要素 M -メッシュ上の H の値 $H^t = \{H_j^t\}$, $j=1, 2, \dots, M$ が既知であるとする。適当な離散化手法を用いて時刻 $t+1$ におけるベクトル $Q = \{Q_j\}$, $j=1, 2, \dots, M$ をつぎの式より定める。

$$\partial \bar{Q} / \partial t = \nabla \cdot (d_2 \nabla \bar{Q}) \quad \text{for } x \in \Omega$$

$$\bar{Q}(x, t) = \max(\lambda, g(x, t)) \quad \text{for } x \in \partial\Omega_0; \quad \bar{Q}(x_j, t) = \max(\lambda, H_j^t), \quad j=1, 2, \dots, M$$

$$Q_j = \bar{Q}_j + H_j^t - \max(\lambda, H_j^t), \quad j=1, 2, \dots, M$$

II. 時刻 $t+1$ におけるベクトル $\bar{R} = \{\bar{R}_j\}$, $j=1, 2, \dots, M$ をつぎより求める。

$$\partial \bar{R} / \partial t = \nabla \cdot (d_1 \nabla \bar{R}) \quad \text{for } x \in \Omega$$

$$\bar{R}(x, t) = \min(0, g(x, t)) \quad \text{for } x \in \partial\Omega_0; \quad \bar{R}(x_j, t) = \min(0, Q_j), \quad j=1, 2, \dots, M$$

III. 時刻 $t+1$ におけるエンタルピー $H^{t+1} = \{H_j^{t+1}\}$, $j=1, 2, \dots, M$ は最終的につぎのように求まる。

$$H_j^{t+1} = \bar{R}_j + Q_j - \min(0, Q_j), \quad j=1, 2, \dots, M$$

アルゴリズム I, II, III が Dirichlet 問題(3), (4), (5), (8)の解に収束することは Rogers 等⁴⁾によって示されている。

参考文献

1. Fox, L.; in A Survey of Numerical Methods for Partial Differential Equations, ed. I. Grudwell & R. Wait, 1979, pp. 332-356.
2. 菊池, 市川; 土木学会論文報告集, No. 289, Sep. 1979, pp. 17-29.
3. Rogers, J.C.W. et al.; SIAM J. Numerical Analysis, Vol. 16, No. 4, Aug. 1979, pp. 563-587.
4. Berger, A.E. et al.; RAIRO Analyse Numérique, Vol. 13, No. 4, 1979, pp. 297-312.