

京都大学工学部 正員 田村 武

1. はじめに

Darcyの法則と構造骨格の線形弾性を仮定した場合, Biotの方程式に従う圧密現象は固有値問題として扱えることができる。とくに圧密の後半部におけるその進行の速さは第1(最小)固有値で決まるため, 各種境界条件のもとで第1固有値を求めることが工学的に重要と考えられる。もう一般的な場合には有限要素法などの数値解析に依るわけにならないが, 簡単な境界条件のもとでは厳密な固有値を与えることができる。ここではそのひとつの場合として, 等方的な応力-ひずみ関係を有する飽和粘土地盤における等(鉛直)ひずみサンドレーンを取りあげ, 固有値の求め方およびその値と各種近似法による値との比較について述べる。なお, 砂柱の剛性や透水係数については考慮しない。

2. 等ひずみサンドレーンの圧密方程式

ここでいう等ひずみ条件とは, 半径方向の変位を u_r , 鉛直方向の変位を u_z (いずれも座標軸の負の方向を正とする)とした場合, 式(1), (2)で表わされるような変形状態を意味する(図-1参照)。各次境界条件(B₀):

$$(B_0) \quad u_r(R_0) = 0, \quad \sigma'_r(R_i) = 0, \quad \int_{R_i}^{R_0} r \{ \sigma'_z + \delta(r, s) \} dr = 0$$

のもとで $u = \delta(r, s)$ なる間げき水圧が半径 s の円筒面に発生したときに生じる体積ひずみ分布を $\Theta(r, s)$ とすれば, 式(3)が圧密の支配方程式となる。ここに R_0 : 有効集水半径, R_i : 砂柱の半径, σ'_r : 半径(鉛直)方向の有効応力, $\delta(r, s)$: Diracのdelta関数, k : 透水係数, γ_w : 間げき水の単位体積重量である。半径方向のつりあい式(4)を満たすためには, 式(1)の変位 u_r は式(5)のようであればならない。ここに λ, μ : Lamé定数, $H(r, s)$: Heaviside関数である。未知定数 A, B および α は境界条件(B₀)を満たすことによって定めることができる。こうして式(2)の u_z と式(5)の u_r が求まると, 体積ひずみ分布 $\Theta(r, s)$ は式(6)となる。これを具体的に計算し式(3)に代入すると, 式(7)なる圧密の方程式を得る。ここで $r \rightarrow r/R_0, s \rightarrow s/R_0, t \rightarrow k(\lambda + 2\mu)t/\gamma_w R_0^2$ (時間係数) と正規化すれば式(8)のように簡単な形となる。なおこれは, 吉岡²⁾が別の方法で導いたものと本質的に等価である。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \int_0^1 s \frac{\partial u}{\partial t}(s, t) ds = \nabla^2 u \quad (8)$$

ここに ν : Poisson比, $n: R_0/R_i$ として $c = 4(1-2\nu)n^2 / \{ (1+\nu) + (1-\nu)n^2 \} (n^2-1)$ である。

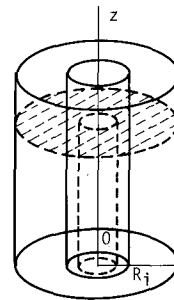


図-1

等ひずみサンドレーンモデル

$$\begin{cases} u_r = u_r(r) \\ u_z = \alpha z \end{cases} \quad (1)$$

$$\int_{R_i}^{R_0} \Theta(r, s) \frac{\partial u}{\partial t}(s, t) ds = -\frac{k}{\gamma_w} \nabla^2 u \quad (3)$$

$$\frac{\partial \sigma'_r}{\partial r} + \frac{\sigma'_r - \sigma'_\theta}{r} + \frac{\partial \delta(r, s)}{\partial r} = 0 \quad (4)$$

$$u_r = -\frac{1}{\lambda + 2\mu} H(r, s) + Ar + B \frac{1}{r} \quad (5)$$

$$\Theta(r, s) = -\frac{1}{\lambda + 2\mu} \delta(r, s) + (2A + \alpha) \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{8\mu R_i^2}{(R_0^2 - R_i^2) \{ (3\lambda + 2\mu) R_i^2 + (\lambda + 2\mu) R_0^2 \}} \int_{R_i}^{R_0} s \frac{\partial u}{\partial t} ds = \frac{k(\lambda + 2\mu)}{\gamma_w} \nabla^2 u \quad (7)$$

3. 固有値の求め方

固有値を $\lambda_\alpha = \eta_\alpha^2$, 固有関数を u_α とし, 式(9)のように向げき水圧分布の形を仮定すると式(8)は式(10)のような一変数の微積分方程式となる。式(11)で定義される I_α が定数であることと式(10)が u_α に関する齊次方程式であることに注意して, その解を式(12)と書くことができる。ただし, D は積分定数である。これを式(10)に代入することにより式(13)の関係を得る。ここに J_0, J_1, Y_0, Y_1 は 0 次, 1 次の第 1 種および第 2 種の Bessel 関数である。一方, 向げき水の排水に関する齊次境界境界条件 (B00):

$$(B00) \quad u_\alpha(R_i) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} u_\alpha(R_o) = 0$$

を満足させるためには, 式(14), (15) の関係が必要である。式(13)~(15)より定数 D と I_α を消去して式(16)なる固有値 $\lambda_\alpha = \eta_\alpha^2$ の決定方程式が求まる。式(17)の圧密の方程式を熱伝導型に近似すると $C=0$ となり, 式(16)の右辺で (分子) = 0 といったものが固有値の決定方程式となる。なお以上の求め方は, その他の境界条件下における等ひずみ軸対称問題に対して一般に有効な方法である。

4. 固有値の値

Poisson 比 $\nu = 1/3$, $n = 3$ とする場合, 式(14)の両辺の表わすグラフを示したものが図-2 である。右辺が実線, 左辺が破線にそれぞれ対応している。両者の交点の横座標 η の値が左から順に $\eta_1, \eta_2, \dots$ であり固有値は $\lambda_1 = \eta_1^2, \lambda_2 = \eta_2^2, \dots$ として求まる。一方, 実線が横軸と交わる点より熱伝導型方程式の固有値も求まる。図からわかるように, 式(16)より求まる高次の固有値が熱伝導型のそれとほとんど一致するのみならず, 第 1 固有値においても大差はない。計算機を用いて求めた式(14)の解 η_1 より固有値 $\lambda_1 = \eta_1^2$ を表-1 に与えた。ここでは $n=3$, 5 および 10 の場合について示してあるが, 同時に熱伝導型の方程式の固有値とともに Barron の求めた等ひずみ条件下の固有値 $\lambda = 2 / [n^2 / (n^2 - 1) \ln n - (3n^2 - 1) / 4n^2]$ の値も載せてある。等方弾性などいくつかの理想的な仮定の上で限定された議論としてではあるが, 圧密の速さを第 1 固有値をもって評価する場合, 簡便な Barron の方法は極めて優れたものであるといえよう。

参考文献 1) 田村 武: 円柱元圧密における固有値問題とその応用, Proc. JSCE, No. 243, pp 79-89 2) 吉国 洋, 坂野一典: 中空円柱の圧密, 第 13 回土質工学研究発表会, pp 237-240.

$$u(r, t) = u_\alpha(r) e^{-\eta_\alpha^2 t} \quad (9)$$

$$\frac{d^2 u_\alpha}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_\alpha}{dr} + \eta_\alpha^2 [u_\alpha + C I_\alpha] = 0 \quad (10)$$

$$I_\alpha = \int_{\frac{1}{n}}^1 r u_\alpha(r) dr \quad (11)$$

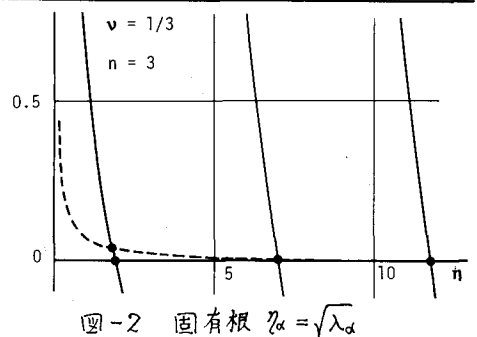
$$u_\alpha(r) = J_0(\eta_\alpha r) + D Y_0(\eta_\alpha r) - C I_\alpha \quad (12)$$

$$\{J_1(\eta_\alpha) - \frac{1}{n} J_1(\eta_\alpha/n)\} + D \{Y_1(\eta_\alpha) - \frac{1}{n} Y_1(\eta_\alpha/n)\} - \left\{1 + \frac{C}{2} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\right\} I_\alpha = 0 \quad (13)$$

$$J_0(\eta_\alpha/n) + D Y_0(\eta_\alpha/n) - C I_\alpha = 0 \quad (14)$$

$$J_1(\eta_\alpha) + D Y_1(\eta_\alpha) = 0 \quad (15)$$

$$\frac{C/n}{1 + \frac{C}{2} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)} \frac{1}{\eta_\alpha} = \frac{J_0(\eta_\alpha/n) Y_1(\eta_\alpha) - J_1(\eta_\alpha) Y_0(\eta_\alpha/n)}{J_1(\eta_\alpha) Y_1(\eta_\alpha/n) - J_1(\eta_\alpha/n) Y_1(\eta_\alpha)} \quad (16)$$



n	3	5	10
Biot	3.254	1.927	1.203
熱伝導型	3.523	1.994	1.217
Barron	3.893	2.136	1.267

表-1 第 1 固有値 $\lambda_1 = \eta_1^2$