III-55

弾性体の3次元的圧密について

前田建設工業㈱技術研究所　正員　河原井 敏男

1. まえがき

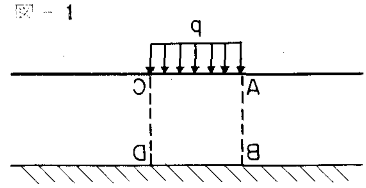
弾性体の圧密理論は、土の圧密解析の基礎理論としての意義を有し、ビオの研究がある。[1)]

本稿はその適用範囲と、より一般的な関係の提示を試みる。

2. 荷重分散が生じる場合の連続方程式

図－1に示すような2次元的(帯状荷重的)な場合を考える。

図－1



この場合の過剰水圧の初期分布は、荷重直下の領域ABCDでp，その両側の領域で0となると考えられる。何故ならば、はじめ全面に作用していた圧力pのうち、実荷重以外の圧力が突然取り払われたものとすれば、上載荷重のない両側の領域では、ただちに膨張による応力開放(大半の)が生じ、過剰水圧はほぼ0になるとみなされるからである。そして次の段階としてただちに領域ABCDの体積圧縮にともなう排除水がその両側の領域に圧入され、そこの体積膨張を誘起すると考えられる。

この場合せん断剛性はあまり大きくない場合を想定すれば十分であり、体積ひずみ状態の時間的・空間的せん移は複雑なものとなると予想されるが、[2)] 上記両側領域における流量の連続方程式は、次式(1)では表示できないことが明らかである。

$$-\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{\gamma_w}\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k}{\gamma_w}\frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad (1)$$

V：体積　t：経過時間　u：過剰水圧　k：透水係数　γ_w：水の単位重量　x，y：平面直角座標

(1)式は体積圧縮状態にある領域においてのみ成立するものであり、ビオは圧密方程式の構成にあたり(1)式を用いているので、その結果は図－1のような荷重分散が生じる場合には適用できない。

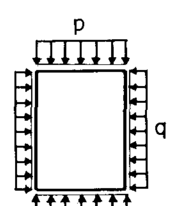
図－1のように荷重分散が生じる場合の圧密は、複雑なため解析的に表示することが困難である。

3. 荷重分散が生じない場合の圧密

球形の弾性体がその全周面に一定の圧力を受けて圧密される場合や、3軸圧密試験(ただし体積変形運動にともなう底面摩擦のような付加的な拘束外力の発生は無視する)の場合のような、荷重分散が生じない場合の圧密は、解析的に表示することが可能であり、近似的には熱伝導型の方程式で表示される。

図－2のような場合(例えば3軸圧密試験)に例をとって考察を進める。

図－2



この場合の圧密過程(過剰水圧分布ないし体積ひずみ状態)は、水ないし弾性体骨格構成部材の弾性圧縮相当のひずみを無視すれば(初期発生水圧は別途計算するものとする[3)])、フックの法則により外力の影響(最終つり合い状態)と過剰水圧の影響との単純和として表示することができる。荷重分散が生じない場合はせん断変形は最終つり合い状態のものが瞬間的に発生し、初期水圧や消散過程の水圧は弾性体にせん断ひずみを与えない。水は圧力をせん断伝達する作用は有しないから、水圧が位置によって変化していても、水圧は必らずその位置の弾性体の線ひずみとつり合っている。水圧変化に応じて弾性体に形のゆがみが生じていても、任意位置の応力はいずれもその合力は0であるから、せん断応力が発生することはない。せん断応力を発生させる作用を有するのは、物体外部から与えられる力のみである。[2)]

いま弾性体のヤング率，体積弾性係数，ラメの定数，ポアソン比を、E，Ks，λ，G，μとする。 また最終つり合い状態の線ひずみ，せん断ひずみ，体積ひずみ，垂直応力，せん断応力，垂直応力和，変位を、ε，γ，e，σ，τ，θ，v で表わし、圧密過程のそれは′を付した、ε'等で表わすことにする。

このとき応力－ひずみ関係は前述したところにしたがって、次のようになる。

$$\varepsilon'_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - 2\mu\sigma_y) - \frac{1-2\mu}{E}u = \varepsilon_x - \frac{1}{3\,Ks}u\ ,\quad \gamma'_{xy} = \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}\ ,\quad \text{etc.} \tag{2}$$

これから体積ひずみ－過剰水圧関係式として次式が得られる。

$$e' = \frac{1-2\mu}{E}\theta - \frac{3(1-2\mu)}{E}u = e - \frac{1}{Ks}u \tag{3}$$

応力のつり合い方程式(4)とひずみ－変位関係式(5)から(6)が得られ、(6)，(2)等から(7)，(8)が得られる。

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} = 0\ ,\ \text{etc.} \quad (4) \qquad \varepsilon_x = \frac{\partial v_x}{\partial x},\ \gamma_{xy} = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x},\ \text{etc.} \quad (5)$$

$$(\lambda + 2G)\nabla^2 e = 0 \quad (6) \qquad \nabla^2 e' = -\frac{1}{Ks}\nabla^2 u \quad (7) \qquad \frac{\partial e'}{\partial t} = -\frac{1}{Ks}\frac{\partial u}{\partial t} \quad (8)$$

(7)，(8)と連続方程式とを組み合わせることによって、熱伝導型の圧密方程式、(9)が得られる。
ただし透水係数k「ならびに弾性係数」は一定で、体積圧縮にともなう排水距離の変化は無視し得るものとする。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{\gamma_w}Ks\nabla^2 u\ ,\quad \frac{\partial e'}{\partial t} = \frac{k}{\gamma_w}Ks\nabla^2 e' \tag{9}$$

以上の誘導過程には有効応力のつり合い方程式が用いられていないが、(2)式の第2式に注意すれば、それは最終つり合い状態の応力のつり合い方程式(4)と同じ内容を表わしているにすぎないことが見いだされる。過剰水圧－体積ひずみ関係式は(2)式の第1式によって与えられ、有効応力のつり合い方程式によって、重複して与えられることはない。

ビォが示した圧密方程式は、(9)式の第2式において Ks（$=\lambda+2G/3$）の代りに、$\lambda+2G$ を用いており、ひずみが1軸的である場合に相応するものとなっている。[1] したがってビォ公式を3軸圧密問題（球の圧密）に適用すると、初期条件と境界条件が互に矛盾したものとなってしまう。

4. あとがき

土は引張応力によって亀裂を発生する可能性があり、弾性体の圧密理論はそのまま援用できないと思われる。

参考文献

1) Biot, M.A.: Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid, Journ. of Appl. Phys., 26－2－182, 1955
2) 河原井敏男：弾性体の圧密理論と土の圧密機構について，土木学会論文報告集寄稿中
3) 中瀬明男，星埜和：土のせん断，土質工学ハンドブック，土質工学会，P175，1974