

粒状体の応力・変形特性を粒子構造全体の変化としてとらえるために、粒状体の2次元モデルを用いてせん断試験を行ない、粒子の中心を結んで描かれる多角形構造に着目して粒子構造の変化を調べた結果、せん断の進行とともに最大主応力方向に細長い多角形が集中することが明らかとなった。¹⁾ここではさらに、この構造変化特性に着目して、すべての多角形を4角形としてモデル化し、せん断時の応力・変形特性の説明を試みた。

1. 粒子構造の変化と応力比 σ_1/σ_3 の関係

間隙を形成する多角形粒子構造の対角線のうち最も長い対角線の最大主応力方向とのなす角を β 、その長さを l_1 、そして多角形の l_1 と直角方向の幅を l_2 とし、 l_1 、 l_2 をそれぞれ長軸、短軸と名付ける。図-1は長軸 l_1 方向の度数分布 $n(\beta)$ のせん断とともになう変化を示している。この図より、多角形の長軸 l_1 はせん断の進行とともに最大主応力方向へ顕著な集中傾向を示し、最大主応力方向に細長い多角形が増加することがわかる。いま、この度数分布を確率密度分布に置き換え、その変化傾向を図-2のようにモデル化すると、 $n(\beta)$ は次式で表わされる。

$$n(\beta) = \frac{2}{\pi(a+1)} \left\{ \frac{2}{\pi}(1-a)\beta + a \right\} \quad (0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}) \quad \dots (1)$$

ここに、 $a = n(0)/n(\frac{\pi}{2}) \dots (2)$ であり、分布の集中の程度を示す。

次に、すべての多角形を図-3に示すような4角形と仮定する。図中 δ は長軸 l_1 方向 β と粒子接点角 β の差を表わし、 $\delta = \tan^{-1}(l_2/l_1)$ である。これより多角形の長軸 l_1 方向の分布 $n(\beta)$ と粒子接点角分布 $N(\beta)$ は、図-4を参照して $N(\beta) = n(\beta+\delta) + n(\beta-\delta)$ として関係づけられ、次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} N(\beta) &= 2n(\delta) = \frac{4}{\pi(a+1)} \left\{ \frac{2}{\pi}(1-a)\delta + a \right\} & (0 \leq \beta \leq \delta) \\ N(\beta) &= 2n(\beta) = \frac{4}{\pi(a+1)} \left\{ \frac{2}{\pi}(1-a)\beta + a \right\} & (\delta \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}-\delta) \\ N(\beta) &= 2n(\frac{\pi}{2}-\delta) = \frac{4}{\pi(a+1)} \left\{ \frac{2}{\pi}(1-a)(\frac{\pi}{2}-\delta) + a \right\} & (\frac{\pi}{2}-\delta \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}) \end{aligned} \right\} (3)$$

ここで、 $N(\beta)$ は領域内の全粒子接点に関する接点角分布に対応するが、任意の面上の粒子接点角分布では接点角 β の値によってその接点角の読み取られる確率が異なる。すなわち、最大主応力面上の粒子接点角分布としては β の絶対値の小さい接点角ほど、最小主応力面上の接点角分布としては β の絶対値の大きい接点角ほど読み取られやすく、それぞれ $N(\beta) \cos \beta$ 、 $N(\beta) \sin |\beta|$ に比例すると考えられる。以上より、最大主応力 σ_1 、最小主応力 σ_3 、主応力比 σ_1/σ_3 は次の(4)~(6)式のように表わされる。

$$\sigma_1 = \frac{\int_0^{\pi/2} N(\beta) \cos \beta \cdot \cos(\beta - \beta_0) \cdot d\beta}{\int_0^{\pi/2} N(\beta) \cos \beta \cdot \sin \beta \cdot d\beta} \quad \dots (4)$$

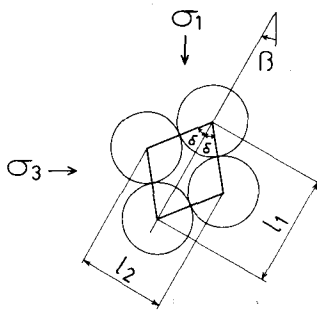


図-3 4角形モデル

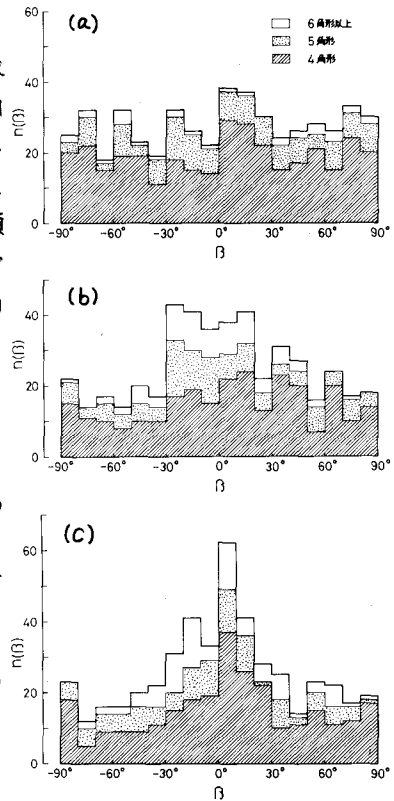


図-1 多角形の長軸 l_1 方向の度数分布 (a) せん断開始時 (b) $\pi/7$ 強度時 (c) 残留強度時

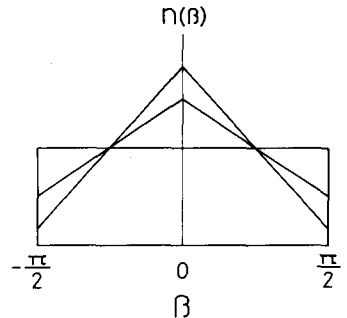


図-2 $n(\beta)$ のモデル化(確率密度分布)

$$\sigma_3 = \frac{\int_0^{\pi/2} N(\beta) \sin \beta \cdot \sin(\beta - \phi_\mu) d\beta}{\int_0^{\pi/2} N(\beta) \sin \beta \cdot \bar{d} \cos \beta d\beta} \quad (5) \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{\int_0^{\pi/2} N(\beta) \cos \beta \cdot \cos(\beta - \phi_\mu) d\beta}{\int_0^{\pi/2} N(\beta) \sin \beta \cdot \sin(\beta - \phi_\mu) d\beta} \quad (6)$$

ここに、 ϕ_μ は粒子間摩擦角、 \bar{d} は平均粒子中心間距離である。(3)式を(6)式に代入すれば、多角形の長軸 l_1 の集中度 a と主応力比 σ_1/σ_3 の関係は、

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{\{(1+a)\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}(a-1)\cos 2\delta\} \cos \phi_\mu + \{(1+a) + \frac{2}{\pi}(a-1)3\delta \cdot \cos 2\delta\} \sin \phi_\mu}{\{(1+a)\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}(a-1)\cos 2\delta\} \cos \phi_\mu - (1+a) \sin \phi_\mu} \quad (7)$$

図-5は(7)式による計算結果を l_1/l_2 をパラメータとして示したものである。この図より、材料の等方性を仮定すると $a=1$ がせん断開始時の等方的な構造を意味し、 a の値が大きくなる(多角形の長軸 l_1 が σ_1 方向に集中する)に従って応力比 σ_1/σ_3 が増加することがわかる。また l_1/l_2 の値が大きい(多角形が細長い)ほど σ_1/σ_3 が大きくなる傾向も明らかである。なお、 $a=1$ で σ_1/σ_3 が1でないのは、せん断初期から粒子間摩擦係数 $\tan \phi_\mu$ が完全にモーブリイズされると仮定しているためである。

2. 応力比 $\sigma_1/\sigma_3 \sim$ ひずみ増分比 $-d\epsilon_3/d\epsilon_1$ 関係

せん断にともなう多角形の長軸 l_1 の σ_1 方向への集中傾向に着目し、せん断中の任意の時点において4角形が定常的に(その辺数を保ったまま)その l_1 方向に一定の長さ Δl_1 だけ圧縮または伸張するものと仮定する。

ここで、圧縮・伸張する多角形の割合はその l_1 方向の β の値によって異なり、 $|\beta|$ の小さい多角形ほど l_1 方向に圧縮しやすく、 $|\beta|$ の大きい多角形ほど l_1 方向に伸張しやすい傾向がみられる。¹⁾いま β をなす多角形がすべて圧縮する場合を+1、伸張する場合を-1とすると、割合 $r(\beta)$ は

$$r(\beta) = (1 - \frac{2}{\pi}\beta) - \frac{2}{\pi}\beta = 1 - \frac{4}{\pi}\beta \quad (0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}) \quad (8)$$

と表わされる。さて、各4角形の σ_1 方向への投影長とその変化量をそれぞれ $x_1, \Delta x_1$ 、 σ_3 方向への投影長とその変化量を $x_3, \Delta x_3$ とすると、

$$d\epsilon_1 = \frac{\sum \Delta x_1}{\sum x_1} = \frac{\int_0^{\pi/2} r(\beta) \cdot n(\beta) \cdot \Delta l_1 \cos \beta \cdot d\beta + \int_{-\pi/2}^0 r(\beta) \cdot n(\beta) \cdot \Delta l_2 \sin \beta \cdot d\beta}{\int_0^{\pi/2} n(\beta) \cdot l_1 \cos \beta \cdot d\beta + \int_{-\pi/2}^0 n(\beta) \cdot l_2 \sin \beta \cdot d\beta} \quad (9)$$

$$d\epsilon_3 = \frac{\sum \Delta x_3}{\sum x_3} = \frac{\int_0^{\pi/2} r(\beta) \cdot n(\beta) \cdot \Delta l_2 \cos \beta \cdot d\beta + \int_{-\pi/2}^0 r(\beta) \cdot n(\beta) \cdot \Delta l_1 \sin \beta \cdot d\beta}{\int_0^{\pi/2} n(\beta) \cdot l_2 \cos \beta \cdot d\beta + \int_{-\pi/2}^0 n(\beta) \cdot l_1 \sin \beta \cdot d\beta} \quad (10)$$

ここに、 $l_2 = l_1 \tan \delta$ ---- (11)、 $\Delta l_2 = -\Delta l_1 / \tan \delta$ ---- (12) である。(1)、(8)、(11)および(12)式を(9)、(10)式に代入すれば、ひずみ増分比 $-d\epsilon_3/d\epsilon_1$ が次のように表わされる。

$$-\frac{d\epsilon_3}{d\epsilon_1} = \frac{\frac{8}{\pi}(a-1)(\frac{\pi}{2}-\delta)^2 + \frac{2}{\pi}(1-3a)(\frac{\pi}{2}-\delta) - \frac{16}{\pi}(a-1)a \cdot \frac{2 \sin^2 \delta - 1}{\sin \delta} - \left\{ \frac{16}{\pi^2}(a-1)(\frac{\pi}{2}-\delta) + \frac{2}{\pi}(1-3a) \right\} 2 \cos \delta + \frac{2}{\pi} \left(\frac{1-3a}{\tan \delta} + a - 3 \right)}{2 \left\{ 1 + \frac{2}{\pi}(a-1)\delta \right\} \sin \delta + \frac{2}{\pi}(a-1) \tan \delta (1 - \sin \delta) - 1 + \cos \delta} \quad (13)$$

(7)式と(13)式より a を介して $\sigma_1/\sigma_3 \sim -d\epsilon_3/d\epsilon_1$ 関係を算定することができる。図-6に l_1/l_2 をパラメータとした計算結果を示している。なお、図中破線はRowe²⁾の応力-ダイレイタンシー式 $\sigma_1/\sigma_3 = \tan^2(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_\mu}{2}) \cdot (-d\epsilon_3/d\epsilon_1)$ を表わしている。

参考文献 1) 竹田(1980): せん断時の粒子構造の微視的考察, 第15回土質工学研究発表会。

2) Rowe, P.W.(1971): "Theoretical meaning and observed value of deformation parameters for soil, Stress-strain behavior of soils," Proc. Roscoe Memorial Symposium, Cambridge University, pp.143-194.

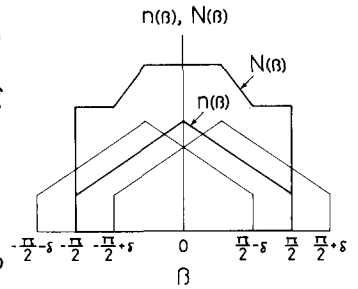


図-4 $n(\beta)$ と $N(\beta)$ の関係

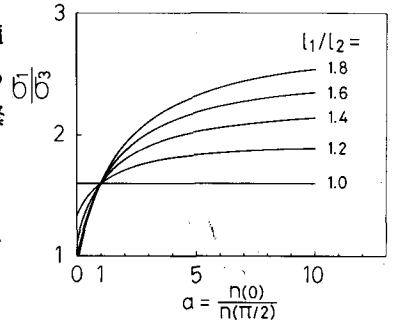


図-5 $\sigma_1/\sigma_3 \sim a$ 関係 ($\phi_\mu = 20^\circ$)

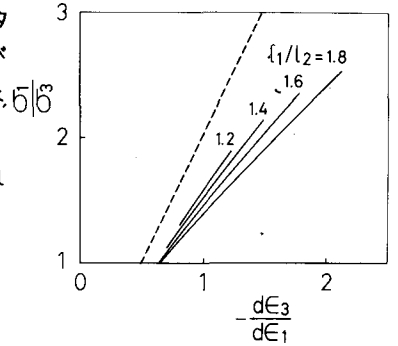


図-6 $\sigma_1/\sigma_3 \sim -d\epsilon_3/d\epsilon_1$ 関係 ($\phi_\mu = 20^\circ$)