II-360　一様流速分布を仮定した沈殿池の解析手法と除去率の算定

九州大学工学部　正員　粟谷陽一
九州工業大学　正員　○藤崎一裕

1. まえがき

横流式沈殿池における濃度分布や除去率に関しては流速分布や拡散係数の分布を池内で一定と仮定したときの解[1]が広く知られている。筆者らは，さきに，流速分布が対数則で表わされる場合に対して，現象を数値解により考察した[2]。本報では，拡散係数に放物形分布を，流速分布には一様分布を仮定した場合について，解析的に検討した。そして，粒子の保存則を表わす微分方程式からえられる固有値や固有関数を用いて，池内の現象を調べた。

2. 基礎式

沈殿池は開水路等流状態と考え，粒子の濃度および沈降速度をそれぞれC，wとすると，定常状態での粒子の保存則および境界条件は次式となる。（図１）

$$\bar{u}\frac{\partial C}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial}{\partial \bar{y}}\left(\bar{D}\frac{\partial C}{\partial \bar{y}} + Z\cdot C\right) \qquad (1)$$

$\bar{D}\cdot\partial C/\partial\bar{y} + Z\cdot C = 0$；$\bar{y}=1$ (2.1)，　C:有限；$\bar{y}=0$ (2.2)

$$\left.\begin{array}{l} \text{ここに，}\ \bar{x}=x/h,\ \ \bar{y}=y/h,\ \ \bar{u}=u/(\kappa u_*) \\ Z=w/(\kappa u_*),\ \ \bar{D}=\bar{y}(1-\bar{y}) \end{array}\right\} \qquad (3)$$

（１）式で流速分布を一様分布（＝平均流速：$\bar{U}_m$）とすると，（４）式となる。

$$\bar{U}_m\frac{\partial C}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial}{\partial \bar{y}}\left(\bar{D}\frac{\partial C}{\partial \bar{y}} + Z\cdot C\right) \qquad (4)$$

$$\bar{U}_m = \frac{1}{\kappa^2}\cdot\left(\ln\frac{h}{y_0} - 1\right),\ (\kappa=0.4) \qquad (5)$$

y_0は対数分布で$u=0$となるyの値である。($y_0 \simeq 0$)

（４）式に変数分離形の解を想定して，（６）式を用いると

$$C(\bar{y}, \bar{x}/\bar{U}_m) = g(\bar{y})\cdot T(\bar{x}/\bar{U}_m) \qquad (6)$$

$$T = A_1 \exp\{-\lambda\cdot\bar{x}/\bar{U}_m\},\quad A_1:\text{定数} \qquad (7)$$

$$\bar{y}(1-\bar{y})g'' + (Z+1-2\bar{y})g' + \lambda g = 0 \qquad (8)$$

の２式がえられる。λは分離定数で，（８）式と，境界条件（９）式とから定まる固有値である。

$\bar{y}(1-\bar{y})g' + Z\cdot g = 0$；$\bar{y}=1$，(9.1)，　$g(\bar{y})$:有限；$\bar{y}=0$ (9.2)

ここで　$\lambda = a^2 - 1/4$ (10)

$\alpha = 1/2 - a$，$\beta = 1/2 + a$，$\gamma = 1+Z$ (11)

とおくと，（８）式は，（12）式の超幾何微分方程式の標準形で表わされる。

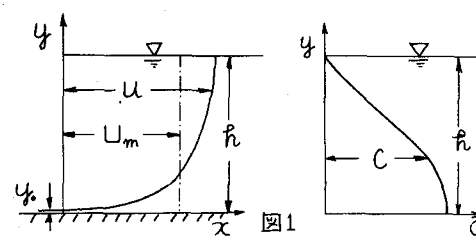

図1

$$\bar{y}(1-\bar{y})g'' + \{\gamma-(\alpha+\beta+1)\bar{y}\}g' - \alpha\beta g = 0 \qquad (12)$$

上式の一般解は，超幾何級数Fを用いて，（13）式で表わされる[3]。（式中のA, Bは定数）

$$g = A\cdot F(\alpha,\beta,\gamma,\bar{y}) + B\bar{y}^{-Z}F(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma,2-\gamma,\bar{y}) \qquad (13)$$

$$F(\alpha,\beta,\gamma,\bar{y}) = \sum_{n=0}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}\frac{1}{n!}\bar{y}^n$$

$$= (1-\bar{y})^{\gamma-\alpha-\beta}\sum_{n=0}\frac{(\gamma-\alpha)_n(\gamma-\beta)_n}{(\gamma)_n}\frac{1}{n!}\bar{y}^n \qquad (14)$$

$$(\alpha)_n = \alpha\cdot(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1),\quad (\alpha)_0 = 1$$

なお，境界条件式（9.2）から，（13）式オ２項は省略できる。以上のことから，（４）式の解は，次のように表わされる。

$$C = \sum_{n=0} a_n g_n \exp(-\lambda_n\cdot\bar{x}/\bar{U}_m) \qquad (15)$$

$$\lambda_n = (Z+n)\cdot(Z+n+1),\quad n=0,1,\cdots \qquad (16)$$

$$\left.\begin{array}{l} g_0 = (1-\bar{y})^Z,\quad g_1 = (1-\bar{y})^Z(1-2\bar{y}), \\ g_2 = (1-\bar{y})^Z\{1 - 2(2Z+3)/(1+Z)\cdot\bar{y}\cdot(1-\bar{y})\}, \\ \text{- - - - - - - - - - - - - - - - - -} \\ g_n = (1-\bar{y})^Z\displaystyle\sum_{m=0}^{n}\frac{(Z+\frac{1}{2}+a)_m(Z+\frac{1}{2}-a)_m}{(1+Z)_m}\frac{\bar{y}^m}{m!} \end{array}\right\} \qquad (17)$$

$$a_n = \frac{\int 1\cdot\left(\frac{1-\bar{y}}{\bar{y}}\right)^Z g_n\, d\bar{y}}{\int\left(\frac{1-\bar{y}}{\bar{y}}\right)^Z g_n^2\, d\bar{y}} \qquad (18)$$

上式で，λ_nおよびg_nはそれぞれ次の固有値と固有関数に対応する。また，初期条件の展開係数は，g_nが$\{(1-\bar{y})/\bar{y}\}^Z$を重み関数として直交することから求められている。次頁図2に，g_nとZ，$\bar{y}$との関係を示す。図2には，Zが大きくなるにつれて，$\bar{y}$の値が大きい箇所でのg_nの変化が小さくなる様子が出ている。

3．濃度分布と除去率

図3中の×印は（15）式で求めた濃度分布の1例を示す。流下方向距離としては，$\bar{x}/\bar{U}_m$ の代りに w/w_0 を用いた。両者の間には

$$w/w_0 = \bar{x}/\bar{U}_m \cdot 1/Z \qquad (19)$$

の関係があり，w_0 は over flow rate である。図中の破線は，（15）式才1項のみによる値を示し，w/w_0 の増大とともに，高次の項の影響が小さくなっていることがわかる。

図4には，水深方向に平均した粒子濃度〈C〉の流下方向の変化を示す。Zが小さいほど，w/w_0 の小さな値から，$\log\langle C\rangle$ と w/w_0 との間に直線関係が成立している。

$$\langle C\rangle = \int C\,d\bar{y} = \sum a_n e^{-\lambda_n/Z\cdot w/w_0}\int g_n\,d\bar{y}$$
$$= \sum A_n e^{-\lambda_n/Z\cdot w/w_0}, \qquad A_n = a_n\int g_n\,d\bar{y} \qquad (20)$$

であるから，Zの値が小さいほど，高次の項の影響が小さいことが表われている。

除去率 r を次式で定義すると

$$r = \frac{\int_0^h u\cdot 1\cdot dy - \int_0^h u\cdot C\cdot dy}{\int_0^h u\cdot 1\cdot dy} = 1 - \frac{\bar{U}_m\int_0^1 \bar{c}\,d\bar{y}}{\bar{U}_m}$$
$$= 1 - \langle C\rangle = 1 - \sum_{n=0} A_n e^{-\lambda_n/Z\cdot w/w_0} \qquad (21)$$

となる。（17），（20）式から 上式の A_n は

$$A_0 = \frac{\Gamma(2Z+2)}{\Gamma(Z+2)^2}, \quad A_1 = A_0\cdot(2Z+3)\left(\frac{Z}{Z+2}\right)^2, \quad \Gamma：ガンマ関数 \qquad (22)$$

などとなるが，nの増大とともにA_nが複雑になる。$Z \le 0.5$ までは，(21)式才1項のみによる除去率の値で十分であるが，Zが大きくなると，より高次の項も無視できず，計算が繁雑になる。図4中の一点鎖線は以下の近似式によるもので，(21)式との差は2％以下である。

$$1 - r = \frac{(Z+1)/A_0 + w/w_0}{1 + w/w_0}\cdot\frac{A_0 e^{-(Z+1)w/w_0}}{1 + Z\cdot e^{-(Z+1)w/w_0}} \qquad (23)$$

なお，図3と図5では，今回の一様流の結果と他の場合とを比較した。（—：対数則，○：Campの解）除去率に関しては，いずれの場合も大差ないことがわかる。

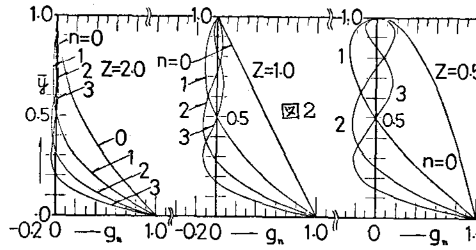

図2

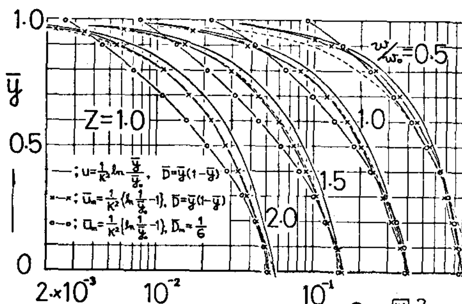

図3

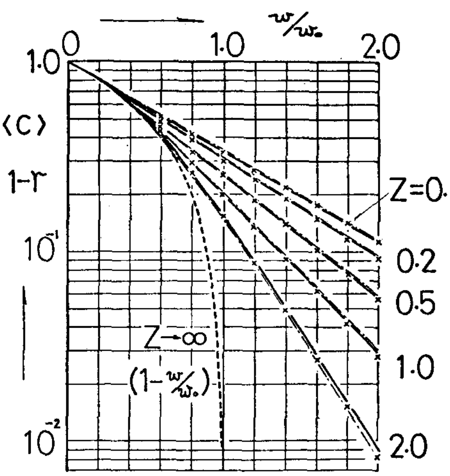

図4

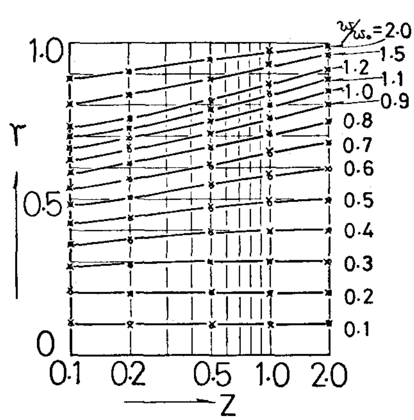

図5

参考文献
1) Camp, T. R. : PASCE, Vol. 71, 1945, P.895
2) 栗谷，藤崎：土木学会論文集，才277号，1978，P.133
3) Sumer, B. M : PASCE, Vol. 103, No. HY11, 1977, P.1323