

京都大学防災研究所 正員 石原安雄・山下島栄一  
岡山県 正員 時松昌則

1. はじめに：降雨が地面に降ったとき、雨水は地中の空気と交換しつつ下方に浸透して行く。そこで、本文では、一定強度の降雨を想定し、それが浸透して行く際の現象について調べたものを報告する。

2. 実験方法：底部を閉じた長さ170cm、直径18.5cmの内筒に気乾状態の砂を注入し約169.5cmの単一砂柱を作り、その上部から一定強度の給水を行なった。実験砂として、平均粒径がほぼ0.15mmの均一粒径に近い砂(K-7砂と呼ぶ)を用いた。また給水は浸透面の上部にほぼ一様に分布した多数の注射針から給水できる装置より与えた。実験に際しての空気圧は、内筒の底部で計測したが、以下ではこの空気圧を $P_a$ と記す。

3. 基本式とその解法：地面に灌水が生じるとその直下では飽和に近い領域が形成されるが、このような領域を除き、比較的水分の小さい部分での浸透水と空隙空気の運動の式は、それぞれ式①、式②でほぼ表現できる。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} [D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} - k(\theta)(1 - \frac{\partial \theta}{\partial z})] \quad \dots \textcircled{1} \quad \frac{\partial (P_a - P_a_0)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} [P_a k_a(\theta) (\frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{P_a}{P_a_0})] \quad \dots \textcircled{2}$$

ここで、 $\theta$ : 体積含水比,  $\theta_{sat}$ : 飽和体積含水比,  $D(\theta)$ : 水の拡散係数,  $k(\theta)$ : 不飽和透水係数,  $k_a(\theta)$ : 透気係数,  $P_a$ : 水と空気の密度,  $P_a_0$ : 大気圧,  $P_a - P_a_0$ : 土壌中の過剰水圧 (=  $P_a - P_a_0$ ),  $z$ : 浸透面を原点とし重力方向を正とする位置座標,  $t$ : 給水開始時を原点とする時間座標である。また、こゝでの初期条件・境界条件は次式となる。

初期条件:  $\theta(x, 0) = 0, P_a(x, 0) = 0 \quad \dots \textcircled{3}$

境界条件:  $z=0$  で,  $-D \frac{\partial \theta}{\partial z} + k(1 - \frac{\partial \theta}{\partial z}) = q \quad \dots \textcircled{4}, P_a(x, t) = 0 \quad \dots \textcircled{5}$

$z=L$  で,  $-D \frac{\partial \theta}{\partial z} + k(1 - \frac{\partial \theta}{\partial z}) = 0 \quad \dots \textcircled{6}, k_a(\frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{P_a}{P_a_0}) = 0 \quad \dots \textcircled{7}$

基本式①②および式④⑦より変数は式⑧で示されるが、 $\frac{\partial \theta}{\partial z}$  の項と  $P_a/P_a_0$  の項が小さいと仮定すると、式⑧は式⑨となる。

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = -\frac{DA}{K} \frac{\partial \theta}{\partial z} + A(1 - \varepsilon) + (1 - A) \frac{P_a}{P_a_0} \quad \dots \textcircled{8} \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} / \frac{\partial \theta}{\partial z} = -\frac{DA}{K} \frac{\partial \theta}{\partial z} + A \quad \dots \textcircled{9} \quad \text{ここで、} A(\theta) = K / (K + k_a),$$

$\varepsilon = \int_0^{\theta_{sat}} (\theta_{sat} - \theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} dz / k_a P_a, P_a(x, t) = P_a_0 + \Delta P_a(x, t), P_a \gg |\Delta P_a|$  である。なお、図-1は  $K(A)$  と  $\theta$  の関係を示す。

ここで、浸透水の Darcy 流速  $V$  は式⑩であり、式中の  $\frac{\partial \theta}{\partial z}$  は式⑨を代入すると式⑪となる。

$$V = -D \frac{\partial \theta}{\partial z} + k(1 - \frac{\partial \theta}{\partial z}) \quad \dots \textcircled{10} \quad V(\theta, t) = -D(C - A) / \frac{\partial \theta}{\partial z} + k(C - A) \quad \dots \textcircled{11}$$

ここで、"relation of flux-concentration" の概念を用いると、 $V(\theta, t)$  は式⑬となる。また、式⑨⑬と式⑤より  $\theta(\theta, t)$  は式⑭となる。なお、 $\theta(\theta, t)$  は  $z=0$  の水分  $\theta$  である。

$$F(\theta, t) \equiv V/q = \{k(C - A) - D(C - A) / \frac{\partial \theta}{\partial z}\} / q \quad \dots \textcircled{12} \quad \theta = -\int_0^{\theta} \frac{D(C - A)}{k(C - A) - qF} d\theta \quad \dots \textcircled{13} \quad P_a = \int_0^{\theta} \frac{AD}{K} d\theta - \int_0^{\theta} \frac{A(D - C - A)}{k(C - A) - qF} d\theta \quad \dots \textcircled{14}$$

また、式⑬と  $z$  を偏微分したものの  $\frac{\partial \theta}{\partial z}$  は、 $q = \int_0^{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} d\theta$  なる連続条件を満足するので、これらの演算を実際に行なうことは、 $\frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z}$  はそれぞれ式⑮、式⑯となる。なお、 $F(\theta, t) = 1$ 。

$$\frac{d\theta}{dt} = -q \left[ \frac{D(C - A)}{k(C - A) - qF} \right]_0^{\theta} + \int_0^{\theta} \frac{D \partial \theta / \partial z}{k(C - A) - qF} d\theta \quad \dots \textcircled{15}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{q}{k} \left[ \frac{D(C - A)}{k(C - A) - qF} \right]_0^{\theta} + \int_0^{\theta} \frac{D(C - A) \partial F / \partial \theta}{k(C - A) - qF} d\theta \quad \dots \textcircled{16}$$

ここで、誘導した関係式⑬~⑯で  $F(\theta, t)$  が判別は解が求まるはずである。そこで、 $F$  の第1次近似として  $F_1 = 1 \quad \dots \textcircled{17}$  とおくと、式⑯の  $\frac{\partial \theta}{\partial z}$  は求まる。そして、第2次近似の  $F$  と  $F_2 = \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) / \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = \frac{q}{k}$  とおくと、式⑯の  $\frac{\partial \theta}{\partial z}$  が求まるので、以下同様の手続きを行ない最終的な  $F$  を決定するという方法論を用いた。図2は第2次近似解と式⑯

と条件式③~⑦のもとで Newton 法により解いた差分解との比較であり、降雨強度は  $q > \{k(C - A)\}_{max}$  (図-1参照) であるが、

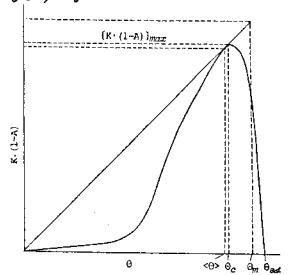


図-1.  $K(A)$  と  $\theta$  の関係

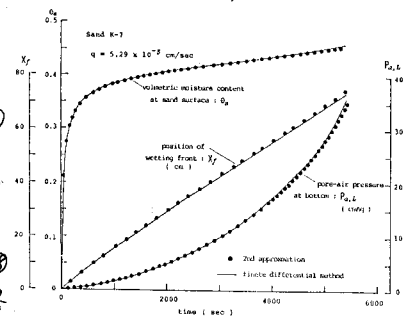


図-2. 第2次近似解と差分解との比較

ほぼ近似解は妥当であるので、以下の考察ではオ2次近似解を用いる。しかし、式①の $\theta$ に式②を代入した式よりすると、降雨強度が $q > \{K(A)\}_{max}$ のとき $\theta_0$ は $\theta_{sat}$ まで増加しつづける(潜水生起の一必要条件)となる。一方、オ2次近似で $\{K(A)\}_{k_0} < q < \{K(A)\}_{\theta_m}$ のときは、 $\theta_m$  ( $> \theta_c$ と仮定)を潜水生起時の $\theta_0$ とすると、

式⑤より $\theta_0$ は $\theta_m$ より小さい値の $q < \{K(A)\}_{k_0}$ に漸近するので、 $\theta_0$ が増加するに従い近似の精度は悪くなる。なお、こゝでの“潜水”とは、wetting front が円筒下端に達するまでに浸透面上に水がたまる現象を意味する。

#### 4. 実験結果の検討

(1) 潜水が生じた場合：図3は潜水が生じた場合の空気圧の変化を、図4はその際のwetting front ( $\theta = 0.15$ と仮定)の移動を示したものである。計算に必要な $K, D, K_a$ の値については、

図3. 空気圧の時間的变化

図4. Wetting frontの移動

$K, D$ は別の実験より求めたが、 $K_a$ は $K_a = K(\theta_{sat}) \frac{\mu_w}{\mu_a} (1 - \frac{\theta}{\theta_{sat}})^n$  (④)  $\mu_w, \mu_a$ : 水、空気 の粘性係数、とある計算での空気圧 $p_a(\theta, t)$ が実験値とよく一致するように入を決めた。入の値は多くの場合 $n=1.5$ としたが、図4での計算値はほぼ実験値と一致していることが判る。実験での空気圧は、(i)ある時間より急激な増加をきたすこと、(ii)急増後に変曲点を有すること、(iii)変曲点までの変化は $\frac{d^2p_a}{dt^2} > 0$ となること、が図3より判る。そこで、まず(i)に注目し急増増加が始まる時点の空気圧とwetting frontの位置の関係と調べたものが図5である。潜水を生じたが $q > \{K(A)\}_{max}$ の場合の実験値(iii)の特性を有すること含まれている。また、図5には $\theta_0$ をパラメータにした計算値も示されている。この図より実験値は破線を示したような直線関係を示し、その際の $\theta_0$ は0.42~0.43(飽和率91~93%)の範囲にあることが判る。一方、(ii)の場合の変曲点時は潜水が始まる時間とほぼ一致したが、そのときのwetting frontの位置と降雨強度の関係を調べたものが図6であり、 $\theta_0$ をパラメータにした計算値も同時に示されている。 $\theta_0 = 0.46$ は飽和状態であるので、潜水は $\theta_0 = \theta_{sat}$ の状態を生じることはなる。これより $\theta_c = 0.39$ であるので $\theta_m > \theta_c$ となり、また $K(A) > \theta$ の関係も考慮し式③④より水分分布は $\theta > \theta_c$ でtransmission zoneが形成され、 $\theta > \theta_c, \theta < \theta_c$ では異なる形状となる。

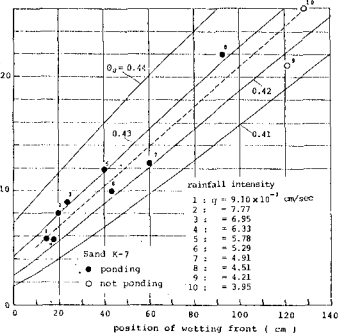
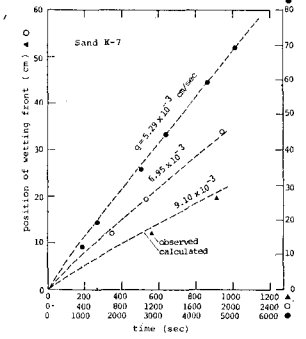
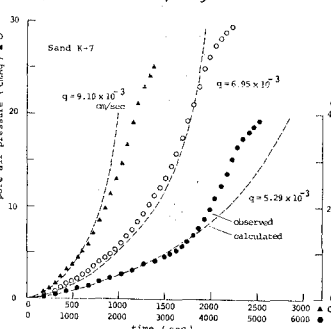
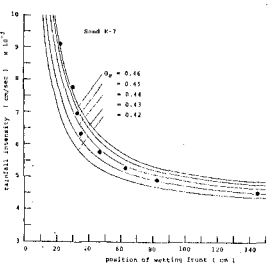


図5. 空気急増時の空気圧とwetting frontの位置

(2) 潜水が生じなかった場合： $q < \{K(A)\}_{max}$ の場合、wetting frontの移動と空気圧は、図6. 潜水時のwetting frontの位置と降雨強度時間経過とともに、式⑤~式⑥よりそれぞれ式⑩、式⑪に漸近する。



$x(\theta, t) = \omega_r(t-t_0) + x_0(\theta)$  (⑫) ;  $\omega_r = \{K(A)\}_{\theta_{sat}} / \theta_{sat}$   
 $p_a(\theta, t) = \int_0^{\theta_{sat}} \frac{A_{sat}}{K} d\theta - A_{sat} x_0(\theta) - A_{sat} \omega_r(t-t_0)$  (⑬)

すなわち、添字 $\omega_r$ は、 $q = K(A)$ を満す $\theta_c$ であり、 $t \rightarrow \infty$ で $\theta_0 \rightarrow \theta_{sat}$ となる。なお、 $x(\theta, t), p_a(\theta, t)$ は移動座標系 $\omega_r(t-t_0)$ でみたととき、形状が保持される結果となっている。そこで、実験値と計算値と比較してみると図7のようになり、両者はほぼ一致し、また実験値には式⑫⑬の特性が認められる。

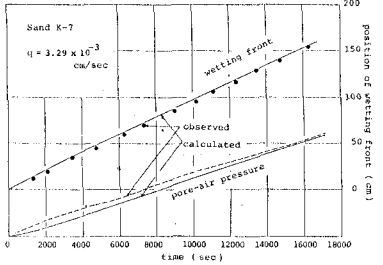


図7. 空気圧の変化とwetting frontの移動

5. おわりに：差分計算に際し、京大防災研究所の早瀬氏に甚大なる援助をいただいた。ここに感謝の意を表わします。

〈参考文献〉 1) 石原・下島：京大防災研年報，1979，2) 石原・下島：京大防災研年報，1978，3) Philip Knight: Soil Science, 1974.