II-250 TiME Marching法を用いた有限要素法による三次元流れの解析

(株)エフ・アイ・ピー　正員　山崎 篤
建設省土木研究所　正員　猪熊 明

まえがき

山間部等の複雑な地形上の流れは、三次元的な複雑な流れとなり、二次元の有限要素法、差分法等では、十分な予測はしにくい。本報は、このような流れ場の予測手法として、三次元ナビエーストークス式の u, v, w, P を未知数とする直接解法を試みた。離散化方法は時間に関して前進差分を行い、Hirt[1]、郷田[2]と同様に中間的な $\hat{u}$ を用いて、連続の条件を導入した。空間に対しては、有限要素法（ガレルキン法）を用いて離散化を行った。

1. 基礎方程式

基礎方程式は、レイノルズ応力にブーシネスクの仮定を用いた運動方程式と連続式を用いる。

(1) 運動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u\cdot\nabla)u = K - \frac{1}{\rho}\nabla P + \varepsilon\cdot\nabla^2 u \qquad (1)$$

(2) 連続式

$$\nabla\cdot u = 0 \qquad (2)$$

ここに、u：流速，P：圧力，K：外力，ρ：密度，ε：渦動粘性係数である。

なお、外力項 $K(0, 0, -g)$ は $P=P(x, y, z)-\rho g z$ と置くことによって省略できる。

2. 解法

2－1．時間方向の離散化

(1)式の運動方程式を中間的 $\hat{u}$ を用いて、次のような離散化を行う。

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t} + u^n\cdot\nabla u^n = -\frac{1}{\rho}\nabla P^{n+1} + \varepsilon\cdot\nabla^2 u^n \qquad (3)$$

$$\frac{\hat{u}-u^n}{\Delta t} + u^n\cdot\nabla u^n = -\frac{1}{\rho}\nabla P^{n} + \varepsilon\cdot\nabla^2 u^n \qquad (4)$$

ここで(3)式と(4)式の差をとると次式のようになる。

$$u^{n+1} = -\frac{1}{\rho}\nabla\hat{P} + \hat{u} \qquad (5)$$

ここに、$\hat{P}=P^{n+1}-P^n$ である。　ここで(n+1)ステップの連続条件 $\nabla\cdot u^{n+1}=0$ に(5)式を代入すると次式になる。

$$\nabla^2\hat{P} = \frac{\rho}{\Delta t}\nabla\hat{u} \qquad (6)$$

2－2．空間の離散化

(4)，(6)，(5)式に有限要素法（ガレルキン法）を用いて離散化すると、次式のようになる。

$$\bar{M}_{\lambda\alpha}\hat{u}_{i\alpha} = \bar{M}_{\lambda\alpha}u^n_{i\alpha} - \Delta t\left(-L_{\lambda\alpha\beta j}\cdot u^n_{j\alpha}\,u^n_{i\beta} - \frac{1}{\rho}N_{\lambda k i}P^n_k - \varepsilon_j\,\bar{D}_{\lambda j\alpha j}u^n\right) \qquad (7)$$

$$S_{\lambda k j}\hat{P}_k - \bar{D}_{\lambda j k j}\hat{P}_k = \frac{\rho}{\Delta t}N_{\lambda\alpha j}\hat{u}_{j\alpha} \qquad (8)$$

$$\bar{M}_{\lambda\alpha} u_{i\alpha}^{n+1} = \bar{M}_{\lambda\alpha} \hat{u}_{i\alpha} - \frac{\Delta t}{\rho} N_{\lambda k i} \hat{P}_k \qquad (9)$$

ここに$\bar{M}$は質量集中マトリックスを示す。またそれぞれの係数マトリックスは、Φを形状関数として次のように表わされる。

$$M_{\lambda\alpha} = \int_V \Phi_\lambda \Phi_\alpha dV,\ L_{\lambda\alpha\beta j} = \int_V \Phi_\lambda \Phi_\alpha \Phi_{\beta,j} dV,\ N_{\lambda k i} = \int_V \Phi_\lambda \Phi_{k,i} dV,\ \bar{D}_{\lambda j \alpha j} = \int \Phi_{\lambda,j} \Phi_{\alpha,j} dV,\ S_{\lambda\alpha j} = \int_S \Phi_\lambda \Phi_{\alpha,j} n_j dS$$

したがって、計算順序は、初期値u^n, P^nを与えると(7)式より$\hat{u}$を求め、次に(8)式より$\hat{P}$を求め、そして(9)式および$P^{n+1} = P^n + \hat{P}$より、新しいP^{n+1}, u^{n+1}を求める。これを順次くり返し計算を行う。

3. 計算結果

計算は、$17^m \times 6^m \times 3^m$の風洞内に、$3^m \times 3^m \times 0.5^m$の直方体物体が置かれた場合を図-1のように三角柱に要素分割して行った。なお計算条件は以下のとおりである。

(1) 境界条件

上流　$u = 4\,m/s$, $v, w = 0\,m/s$

下流　$P = 0\,kg/m^2$

側壁及び物体表面　$u = v = w = 0\,m/s$

(2) 初期条件

全領域で　$u = 2\,m/s$, $v = w = 0\,m/s$, $P = 0\,kg/m^2$

(3) その他の計算条件

渦動粘性係数　$\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0.06\,m^2/s$　$\varepsilon_z = 0.01\,m^2/s$

密度　$\rho = 1.225\,kg \cdot s^2/m^4$

計算時間間隔　$\Delta t = 0.005\,sec$

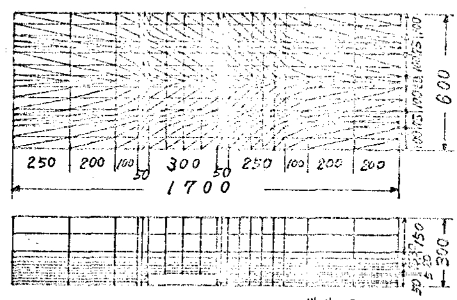

図-1　要素分割図（4336節点）

図-2は300ステップ後の計算結果をベクトル表示した図である。この結果より、連続性および、定性的な流況は、ほぼ妥当であると考えられる。なお、今回要した計算時間は、M180HでCPU約60分であった。

結語

本計算手法は、流れに関して陽の形で解くことができ、計算容量が比較的少なくてすむ。また中間的な値$\hat{u}$を用いることによって圧力方程式の高次の項が省略され、低次の形状関数を用いることができる等、三次元解析には有効な手法であると考える。

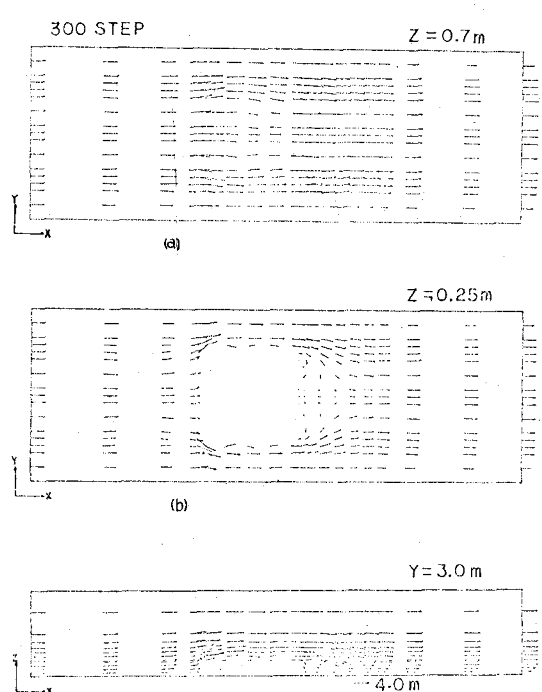

図-2　流速ベクトル図

〈参考文献〉

(1) C.W.Hirt他「Calculating Three-Dimensional Flows around Structures and over Rough Terrain」J.Computational Physics 10 (1972)

(2) 鄉田勝彦「Cavity Flowの計算」第2回有限要素法による流れの解析セミナー，日科技連 1978