

京都大学大学院 学生員 長内 進  
 京都大学工学部 正員 岩佐 義朗  
 京都大学工学部 正員 井上 和也

1. はじめに 本報は、平面流れの数値解析に特性曲線法を適用するときの問題点について考察したもので、特性曲線表示された基礎式を差分化した結果と、基礎式を直接差分化する従来の結果との比較を行な<sup>1)</sup>。両方法の関係を明らかにするとともに、実際に琵琶湖南湖の湖流解析を実施し、その結果からも両方法の相似点や相異点を見い出して、本計算法の特徴を検討したものである。

2. 基礎式およびその特性曲線表示 流量フラックス表示による従来の方法との比較を行なう便宜上、ここでも同じ表示による二次元一層モデル(図1)を適用するものとし、しかも流れの移流的变化が比較的緩やかであるとして、非線型項を省略した次式を基礎式として用いる。

$$\text{連続式} : \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\text{運動方程式} : \frac{\partial M}{\partial t} + g(h+\zeta)\frac{\partial \zeta}{\partial x} - F_x = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + g(h+\zeta)\frac{\partial \zeta}{\partial y} - F_y = 0 \quad (3)$$

ここに、記号は図1に示すとおりであり、 $F_x = fN + \frac{1}{2}\{\tau_x(s) - \tau_x(b)\}$ 、 $F_y = -fM + \frac{1}{2}\{\tau_y(s) - \tau_y(b)\}$

で、 $f$ : コリオリの因子、 $\tau_{x,y}(s)$ : 水表面に作用するせん断力、 $\tau_{x,y}(b)$ : 湖底におけるせん断力である。つぎに、上の基礎式を前報<sup>2)</sup>と同様の方法により、特性曲線表示に改める。特性曲面の一つは、図2に示されるようなモンジュの錐 $[(\frac{dx}{ds})^2 + (\frac{dy}{ds})^2 = c^2]$ となり、この曲面上での基礎式の特性曲線表示は次式のように表される。

$$\frac{D\zeta}{Dt} + \frac{1}{c} \cos\theta \frac{DM}{D\theta} + \frac{1}{c} \sin\theta \frac{DN}{D\theta} - \sin\theta \frac{DM}{D\theta} + \cos\theta \frac{DN}{D\theta} - \frac{1}{c} \cos\theta F_x - \frac{1}{c} \sin\theta F_y = 0 \quad (4)$$

ただし、 $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + c \cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + c \sin\theta \frac{\partial}{\partial y}$  で陪特性曲線に沿った微分であり、 $\frac{D}{D\theta} = -\sin\theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos\theta \frac{\partial}{\partial y}$  は、

波面の接線方向への微分である。 $\theta$ は図2に示すように方向を表すパラメータで、特性曲面上のある点から立てた法線ベクトルの  $x$  軸平面に投影されたベクトルが  $x$  軸となす角である。

3. 基礎式の差分化および従来の差分式との比較 本報では、(4)式から得られる、 $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \pi$  の4方向の陪特性曲線に沿った関係式のみを用いて差分化する方法(図3)をとった。(すなわち、前報のように連続式(1)の差分式は用いていない。) その結果、点Pの流量フラックスおよび水位は、次式のように求められる。

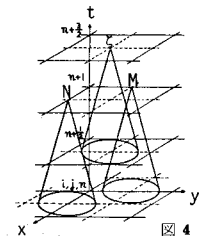
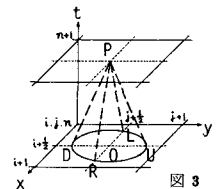
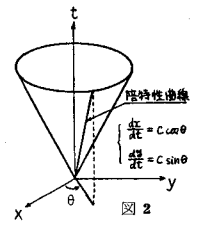
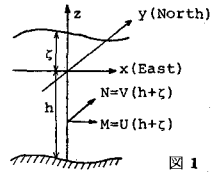
$$M_p = \frac{M_R + M_L}{2} - \frac{C_0}{2}(\beta_R - \beta_L) + [F_x]_0 \Delta t$$

$$N_p = \frac{N_u + N_d}{2} - \frac{C_0}{2}(\beta_u - \beta_d) + [F_y]_0 \Delta t \quad (5)$$

$$\beta_p = \frac{\beta_R + \beta_L + \beta_u + \beta_d}{4} - \frac{1}{4C_0}(M_R - M_L + N_u - N_d) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right)_0 \Delta t$$

添字は、図3の各点における値であることを示し、上式に必要な点R、L、UおよびDにおける値は当該点の周辺格子の中央での値より内挿して求められる。本報では、前報の線型一次内挿に加えて、二次内挿の場合も考慮し、しかも前報で述べた数値拡散項の影響について考察するためにも、便宜的に数値拡散項に係数Eを導入することにする。すなわち、(5)式は以下のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} (M_{i,j,t+\Delta t}^n - M_{i,j,t}^n) / \Delta t &= -c^2(\beta_{i,j,t+\Delta t}^n - \beta_{i,j,t}^n) / (2\Delta s) + [F_x]_{i,j,t+\Delta t}^n + E^c(2\Delta s)(M_{i,j,t+\Delta t}^n - 2M_{i,j,t}^n + M_{i,j,t-\Delta t}^n) \\ (N_{i,j,t+\Delta t}^n - N_{i,j,t}^n) / \Delta t &= -c^2(\beta_{i,j,t+\Delta t}^n - \beta_{i,j,t}^n) / (2\Delta s) + [F_y]_{i,j,t+\Delta t}^n + E^c(2\Delta s)(N_{i,j,t+\Delta t}^n - 2N_{i,j,t}^n + N_{i,j,t-\Delta t}^n) \\ (\beta_{i,j,t+\Delta t}^n - \beta_{i,j,t}^n) / \Delta t &= -(M_{i,j,t+\Delta t}^n - M_{i,j,t}^n) / (2\Delta s) - (N_{i,j,t+\Delta t}^n - N_{i,j,t}^n) / (2\Delta s) \\ &\quad + E^c(4\Delta s)\{(\beta_{i,j,t+\Delta t}^n - 2\beta_{i,j,t}^n + \beta_{i,j,t-\Delta t}^n) + (\beta_{i,j,t+\Delta t}^n - 2\beta_{i,j,t}^n + \beta_{i,j,t-\Delta t}^n)\} \end{aligned} \quad (6)$$



ただし、 $\varepsilon = 1$  は一次内挿、 $\varepsilon = \frac{Cot}{\Delta t}$  は二次内挿の場合であり、 $\varepsilon = 0$  は数値拡散項を含まない場合で、特性曲線法による一次元不定流の解析に用いられる方法と同様の時間差分として陪特性曲線の方向そのものを含まない差分式になっている。ここで、 $\varepsilon = 0$  の場合は不安定な差分 scheme になっている。しかし、これに時間的および空間的にずらした差分化(図4)を行えば、従来の multi-level の staggered scheme の差分式と完全に一致すること、および従来の差分式が二次の精度を有するのに対して、特性曲線法による差分式(6)は $\varepsilon$ の値にかかわらず、一次の精度を有していることが導かれる。

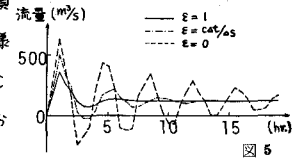


図5

4. 琵琶湖南湖の湖流の数値解析への適用 前述したことにより、3種類の数値拡散項の係数(1,  $\frac{Cot}{\Delta t}$ , 0)のそれぞれについて、時間および空間の差分のとり方にずらしを考え、次の4種類の scheme による差分式を適用した。すなわち、ずらしを考慮しない場合[(6)式]と、時間と空間の両方についてずらしを考慮する場合の他に、それぞれのずらしの効果を検討するために、単独に与えた場合(時間的なずらしだけを考慮する場合と空間的なずらしだけを考慮する場合)をも考察した。これらの合計12種類の差分式を用いて、前報と同様な条件のもとに琵琶湖南湖の湖流の数値シミュレーションを実施した。その結果、次の二つの特徴が明らかになった。まず第一に、北端から南湖へ流入する流量の時間的変化(北端流量図)ならびに南湖内の流速分布(流速ベクトル図)の計算結果が、schemeの違いよりも数値拡散項( $\varepsilon$ の値)によって支配されていることである。すなわち、 $\varepsilon$ の値が0,  $\frac{Cot}{\Delta t}$ (この場合、約0.25と計算される)、1と変化するにつれて、北端流量図(図5)にみられる4時間周期の共振の減衰が早まり、また流速ベクトル図(図6~図8)では時計まわりの環流が消滅していく結果になっている。(なお、これらはいずれも北東風の場合である。) 第二に時間的ずらしが安定性に対してよい影響を与えていることである。これは、増幅行列を用いた安定解析(ただし簡単のため、一次元化した線型系を扱った。)の結果(表1)から明確にみられる。さらに、実際の数値シミュレーション結果において、ずらしを考慮しないときの $\varepsilon = 0$ の場合と平面的ずらしだけを考えたときの $\varepsilon = 0$ および $\varepsilon = \frac{Cot}{\Delta t}$ の場合とが不安定になっていることから認められている。以上より、実際の数値計算の結果およびその安定性に及ぼす $\varepsilon$ の効果つまり数値拡散項の影響が非常に大きく反映していることがわかる。

	$\varepsilon$ の 範 囲
ずらしなし	$\frac{1}{6} \leq \varepsilon < 4$
平面的ずらし	$\frac{2}{3} \leq \varepsilon \leq 4$
時間的ずらし	$0 \leq \varepsilon \leq 4$
平面的・時間的ずらし	$0 \leq \varepsilon \leq 2$

表1

5. おわりに 従来の差分式が scheme の違いや数値拡散項の有無によって、特性曲線法による差分式の中に位置づけられるというように、両方法の関係が明らかになり、特性曲線法による平面流れの数値解析の可能性が見い出された。しかし、この方法には、理論的には一次元流れの場合と異なり、特性曲面上の関係式において特性方向以外の向きの微分が含まれること、無数の陪特性曲線に沿う特性関係が存在し、しかも相互の独立性が明確でないことなどの種々の難点が含まれており、また、さらに数値計算上においても差分式に含まれる数値拡散項の扱いにおいて、なお検討すべき点が多く存在し、いずれも今後の課題とされよう。

《参考文献》1)岩佐・井上・片山、第32回年講Ⅱ-139、1977 2)吉田・岩佐・井上、第34回年講Ⅱ-117、1979

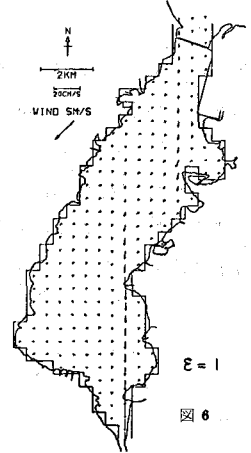


図6

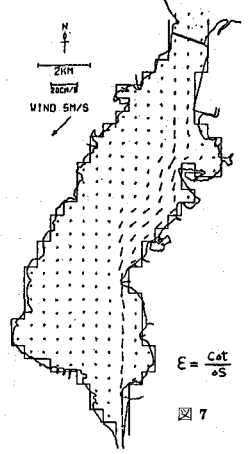


図7

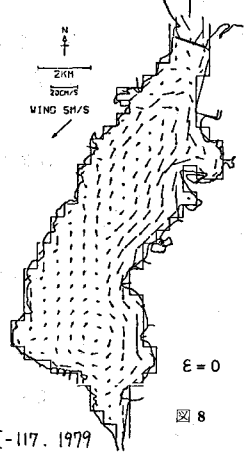


図8