

山梨大学 大学院 学 岩 崎 晋 平  
 三井共同建設コンサルタント 正 宮 下 繁 男  
 山梨大学 工 正 萩 原 能 男

1. はじめに

河川改修工事などを実施する場合の重要な問題の一つに、河川合流部、分流部などにおいて、水流の挙動をどのように計算するかという問題がある。従来行なわれているこの種の研究は、等流水深、限界水深を用いて一次元流の解析をしたものや、流速を求めるために、流れの関数や速度ポテンシャルを用いたものがほとんどであり、流速、水深を同時に求めた例は少ない。それ故、本研究では、河床に $x-y$ 平面を持つ二次元定常流モデルを考え、このモデルの基礎方程式を導き、有限要素法を用いて、河川合流部における流速や水深を数値計算で求めたものである。

2. 基礎方程式

$x-y$ 平面の二次元定常流中の微小直方体を考え、この微小直方体に流入する量と流出する量が等しいことから、連続の方程式は次式のようになる。

$$\frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

ここに、 $u, v$ は $x, y$ 方向の平均流速、 $h$ は水深である。

また、この微小直方体において、流体に働く力を慣性力、重力、圧力、抵抗力とし、 $x$ 方向、 $y$ 方向の力の釣り合いを考えると、 $x$ 方向、 $y$ 方向の運動方程式は、それぞれ、次式のようになる。

$$x \text{ 方向 } u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \left( S_{0x} - \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\sqrt{u^2 + v^2} u}{C^2 h} \right) \tag{2}$$

$$y \text{ 方向 } u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = g \left( S_{0y} - \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\sqrt{u^2 + v^2} v}{C^2 h} \right) \tag{3}$$

ここに、 $S_{0x}$ 及び $S_{0y}$ はそれぞれ、 $x$ 方向、 $y$ 方向のこう配で、河床の最急こう配 $S_0$ を用いて、次のように書き表わされる。 $S_{0x} = S_0 \cos \beta / \sqrt{1 - (S_0 \sin \beta)^2}$ ,  $S_{0y} = S_0 \sin \beta / \sqrt{1 - (S_0 \cos \beta)^2}$ 。ただし、 $\beta$ は河床の最急こう配の方向と $x$ 軸とのなす角度である。また、 $g$ は重力加速度、 $C$ はChezyの係数である。

3. 数値計算法

本研究では、上に述べた基礎方程式を解くために、有限要素法のうちの汎関数表示を必要としない重み付き残差法の一つであるGalerkin法を用いた。この方法は重みとして、形状関数を用いるものである。また、要素は二次元シンプレックス要素を用いた。すなわち、図-1のように領域を多数の三角形に分割し、その節点の流速及び水深をベクトル量として、求めるものである。したがって、連続の方程式を要素方程式化すると、次式のようになる。

$$\int_A \left\{ \frac{\partial(N_i^T)}{\partial x} u h + \frac{\partial(N_j^T)}{\partial y} v h \right\} dA - \int_S [N]^T \bar{Q} ds = \{0\} \tag{4}$$

ここに、 $[N] = [N_i, N_j, N_k]$ で $N_i, N_j, N_k$ は形状関数である。また、 $\bar{Q}$ は単位幅当りの流出流量であり、要素間ではこの値は相殺され、境界線上においてのみ有限な値をもつ。同様に、 $x$ 方向、 $y$ 方向の運動方程式の要素方程式化は、それ

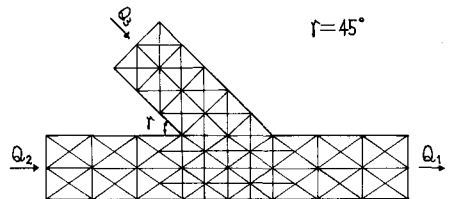


図-1

それ、次式のようになる。

$$x \text{ 方向 } \int_A [N]^T \left\{ u h \frac{\partial u}{\partial x} + v h \frac{\partial u}{\partial y} - g (S_{0x} - h \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{u}{C^2} \sqrt{u^2 + v^2}) \right\} dA = \{0\} \quad (5)$$

$$y \text{ 方向 } \int_A [N]^T \left\{ u h \frac{\partial v}{\partial x} + v h \frac{\partial v}{\partial y} - g (S_{0y} - h \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{v}{C^2} \sqrt{u^2 + v^2}) \right\} dA = \{0\} \quad (6)$$

これらの式を積分方程式を用いて求め、それぞれ、次式のように簡略化して表わす。

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_k \end{Bmatrix} = \{0\} \quad \dots \quad (7) \quad \{G_1\} = \begin{Bmatrix} G_{1i} \\ G_{1j} \\ G_{1k} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad \dots \quad (8) \quad \{G_2\} = \begin{Bmatrix} G_{2i} \\ G_{2j} \\ G_{2k} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad \dots \quad (9)$$

ここに  $\{F\}$  は連続の方程式であり、 $\{G_1\}$  は  $x$  方向の運動方程式、 $\{G_2\}$  は  $y$  方向の運動方程式である。

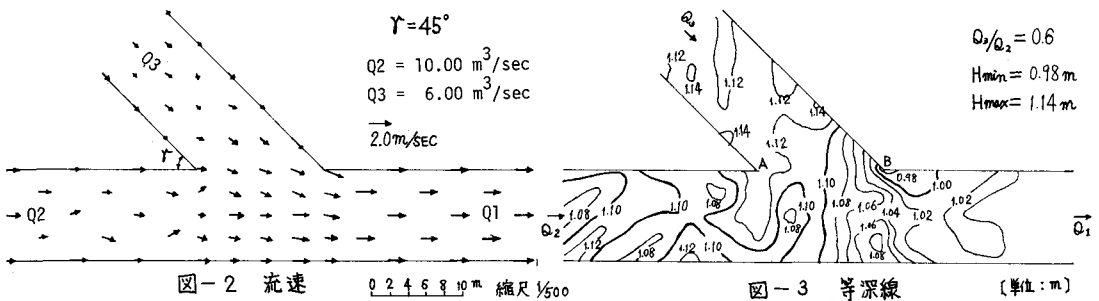
これらの式は非線形であるので線形化の手法である Newton 法を用いる。ベクトル量  $(u_n, v_n, h_n)$  の  $m$  回目の近似値を  $(u_n^m, v_n^m, h_n^m)$  とする。ただし、 $n = i, j, k$ 。 (7) 式に Newton 法を適用すると次式になる。

$$\sum_{i,j,k} \left[ \frac{\partial(F)}{\partial u_n^m} \Delta u_n^m + \frac{\partial(F)}{\partial v_n^m} \Delta v_n^m + \frac{\partial(F)}{\partial h_n^m} \Delta h_n^m \right] = -\{F\} \quad (10)$$

同様な式が (8)、(9) 式についても得られる。これらの式は微小量  $\Delta u_n, \Delta v_n, \Delta h_n$  に関する線形要素方程式であり、一要素ごとに得られる。この要素方程式を要素 matrix 化し、全体 matrix へ重ね合せ、既知節点に注意して Gauss の消去法で解く。得られた微小量の値に試算値を加え、これを次の試算値とし、所定の精度が得られるまで繰り返し計算する。

#### 4. 計算例とその考察

図-1 に示したように、本川と支川の合流角度が  $45^\circ$ 、両者の河川幅が等しい幅広長方形断面の開水路を代表例にとり、河川こう配は本川、支川とも  $1/1000$ 。また、本川と支川とは、支川側で河床を变形させて、本川に接続させた。Chezy の係数は、本川、支川とも  $40 \text{ m}^{1/2}/\text{sec}$ 。領域の分割は、図-1 のように、116 要素、74 節点とし、合流部で細かくした。また、側壁面においては、壁面抵抗は無視しうるものとし、流速は壁面と平行となるように補正した。流れは常流で、本川下流端で境界条件として、水深を与えた。初期試算値は、全領域において、境界条件で定めた流速、水深を用いた。また、本川と支川の流量比は  $0.6$  とした。計算の結果得られた流速と等深線の図がそれぞれ、図-2、図-3 である。この計算例は流れの全域にわたって常流であり、Froude 数は  $0.10 \sim 0.60$  の間にある。したがって、下流側の影響が水面をせき上げる結果になっている。また合流部の B 点付近では水深は小さくなっていることがわかる。



本研究においては、河床抵抗は考慮したが、側壁の抵抗は無視した。したがって、河川幅の狭い場合には無理が生ずる。今後側壁効果などに取り入れるるも検討する必要がある。