

§1. まえがき 乱流拡散の基礎方程式が放物型であるということは、流体中に注入された混合物は直ちに全空間に拡がり、拡散時間がどれ程小さくても、注入点から任意の大きさの距離において、混合物が見出されるという結果を招くことになる。このことは明らかに、実際観察される拡散現象（流体粒子の速度が有限であること）と矛盾している。しかしながら、拡散時間が比較的大きい場合や拡散雲の境界から離れた所では、放物型拡散方程式によって満足に記述されることは周知の通りである。この報告は、二次元開水路乱流での移流分散過程において、一様な拡散過程（放物型偏微分方程式）と有限速度をもつ拡散過程（電信方程式）について、流れ方向の濃度分布のキュムラントの経時変化を求めて比較し、移流分散初期の現象を明らかにしようとするものである。また数値計算法によらず、理論的な解析によって、基礎方程式と物理量のつながり（意味）をはっきりさせたいと考えている。

§2. 流速分布と特性関数

FIG.1 に示すような二次元開水路を考え、 y 軸を水路底から水表面へ向けてとり、水深を h とすれば、等流状態の乱流流速分布は速度欠損 $U_0 - u$ が対数分布 (1) で示され、断面平均流速 $\langle u \rangle$ と流速 u の差 V は (2) となる。ここに U^* はマサツ速度、 k はカルマン定数である。 $U(\cdot)$ を単位階段関数とすれば、 V の累積分布関数 $F(v)$ は (3)、確率密度関数 $f(v)$ は (4)、そして特性関数 $Q(w)$ は確率密度関数のプラスイフーリエ変換として (5) で表わされる。特性関数の対数であるキュムラント関数 $K(w)$ は (6) で示され、その $(i\omega)^{\uparrow n}$ の係数である n 次キュムラント W_n は (7) となる。以下 i は虚数単位 ($\sqrt{-1}$)、 $\uparrow$ はべき乗を表わす。

§3. 一様な拡散過程

断面平均流速で移動する座標系 (X) において、流れ方向の断面平均濃度分布 C に関する保存式は、2階以上の高階の導関数を用いて (8) で示される。ここで T は Lagrange の積分時間である。 C の特性関数 $M(b, t)$: (9) を用いて (8) を書き換え、 T 時間後の濃度分布（インパルス応答）が FIG.1 に示すように断面内流速の確率密度と同形になることを考慮して (10) が得られる。したがって (8) における右辺の係数 B_n は流速分布のキュムラント W_n と関連づけることで (11) となる。ここに $L = U^* T / k$

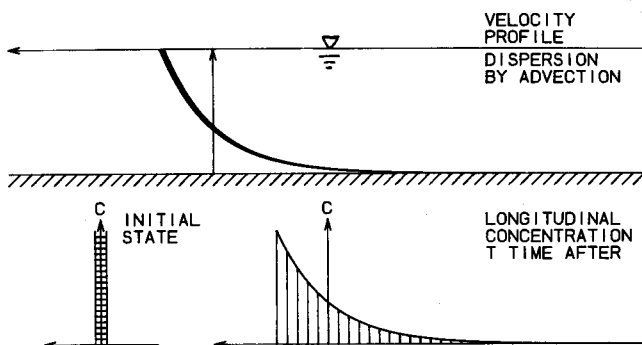


FIG.1 INITIAL DISPERSION OF CLOUD OF CONTAMINANT IN TURBULENT OPEN CHANNEL FLOW. SHOWING THE ASYMMETRY CAUSED BY ADVECTION

< VELOCITY DISTRIBUTION >

$$U_0 - u = -U^*/k \cdot \log(y/h) \quad (0 \leq y \leq h) \quad (1)$$

$$v = \langle u \rangle - u = -U^*/k \cdot \{1 + \log(y/h)\} \quad (0 \leq y \leq h) \quad (2)$$

$$F(v) = 1 - y/h = 1 - \exp(-1 - kv/U^*) \cdot U(v + U^*/k) \quad (3)$$

$$f(v) = dF/dv = k/U^* \cdot \exp(-1 - kv/U^*) \cdot U(v + U^*/k) \quad (4)$$

$$Q(w) = \langle \exp(i\omega v) \rangle = \exp(-i\omega U^*/k) / (1 - i\omega U^*/k) \quad (5)$$

$$K(w) = \log\{Q(w)\} = -i\omega U^*/k - \log(1 - i\omega U^*/k) \\ = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{W_n}{n!} (i\omega)^{\uparrow n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(i\omega U^*/k)^{\uparrow n}}{n} \quad (6)$$

$$W_n = (n-1)! \cdot (U^*/k)^{\uparrow n} \quad (n=2, 3, 4, \dots) \quad (7)$$

< HOMOGENEOUS DIFFUSION PROCESS >

$$T \frac{\partial C}{\partial t} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{\uparrow n}}{n!} B_n \frac{\partial^n C}{\partial X^n} \quad (8)$$

$$M(b, t) = \langle \exp(ibX) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} C(X, t) \cdot \exp(ibX) \cdot dX \quad (9)$$

$$T \frac{\partial M}{\partial t} = \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{(ib)^{\uparrow n}}{n!} M = K(bT) \cdot M \quad (10)$$

$$B_n = W_n \cdot T^{\uparrow n} = (n-1)! \cdot (U^* T / k)^{\uparrow n} = (n-1)! \cdot L^{\uparrow n} \quad (11)$$

$$M(b, t) = \exp(-ibLt/T) / (1 - ibL)^{\uparrow (t/T)} \quad (12)$$

$$\log\{M(b, t)\} = -ibLt/T - t/T \cdot \log(1 - ibL) \quad (13)$$

$$\text{variance of } X : \langle X^{\uparrow 2} \rangle = L^{\uparrow 2} \cdot t/T \quad (14)$$

はT時間移流後の拡散幅の大きさを示す。(10)を解いて流れ方向の濃度分布の特性関数(12)のように得られ、その対数であるギュムラント関数は(13)となる。よって分散:(14), 3次ギュムラント:(15), 4次——:(16), ゆがみ:(17), 超過:(18)のようにそれぞれ与えられる。すなわちギュムラントは分散時間に比例し, 濃度分布が正規分布からどの程度ずれているかを示す, ゆがみは分散時間の平方根に逆比例し, 超過は分散時間に逆比例する。(第24回水講の別解法)。

§4. 有限速度をもつ拡散過程 一様な拡散過程としての取り扱い(放物型方程式)では, ギュムラントが分散時間に比例し, 拡散初期の状態を説明できない。それでLagrangeの相関関数を指数関数とあいたのと同じ意味をもつ, 双曲型の偏微分方程式(電信方程式)がGoldsteinにより提案されている。そこで(8)に対応するものとして(19)が与えられる。これを特性関数 $M(b,t)$ で表わし, 初期条件(21)を用いて解けば(22)が得られる。したがって分散:(23), 分散の変化率:(24), 3次ギュムラント:(25), ゆがみ:(26)のように示される。分散と分散の変化率については等方性乱流場において得られている結果と同じである。

(14)と(23)による分散の変化をFIG.2に示し, 分散の変化率(24)をFIG.3に与える。(17)と(26)によるゆがみの変化(両対数プロット)をFIG.4に示す。以上のことから分散時間がLagrangeの積分時間の数倍を越えれば, 分散時間をTだけ減じた一様な拡散過程で現象を取り扱えるのではないかと考えられる。

§5. おすび 二次元開水路乱流における流速分布(対数分布)に基づき, 一様な拡散過程と有限速度をもつ拡散過程について, 流れ方向の濃度分布の特性関数を求め(12)・(22), 分散とゆがみの経時変化を与えた。分散時間かLagrangeの積分時間の数倍を越えれば, 時間軸をも丁だけ平行移動した一様な拡散過程として拡散現象を取り扱うことができる。

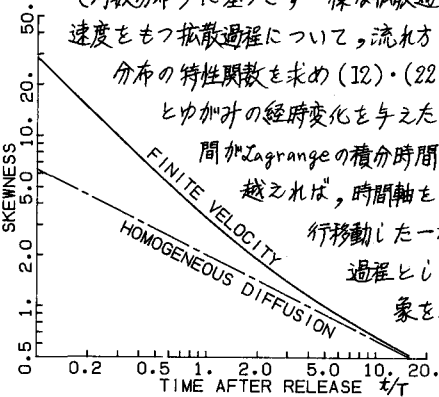


FIG. 4- SKEWNESS FOR VARIOUS DIFFUSION PROCESSES

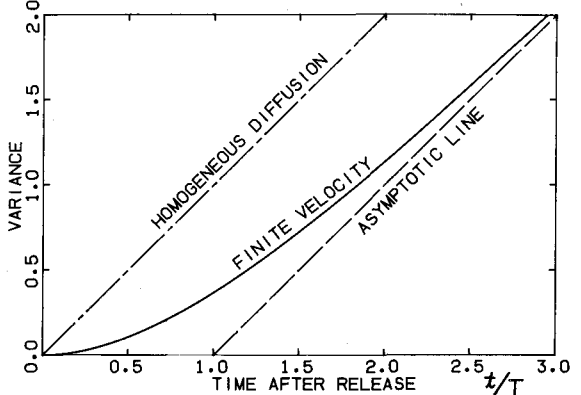


FIG. 2- VARIANCES FOR VARIOUS DIFFUSION PROCESSES

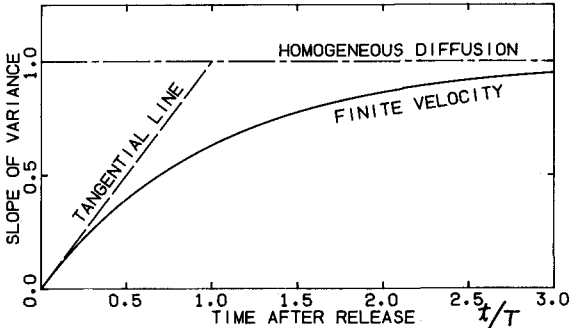


FIG. 3- SLOPES OF CURVES OF VARIANCES

- third cumulant of X : $\langle X^3 \rangle = L^3 \cdot 2t/T$ (15)
- fourth : $\langle X^4 \rangle - 3 \cdot \langle X^2 \rangle^2 = L^4 \cdot 6t/T$ (16)
- skewness of X : $S = 2 \cdot \sqrt{T/t}$ (17)
- excess of X : $E = 6 \cdot T/t$ (18)

< DIFFUSION WITH A FINITE VELOCITY >

$$T \uparrow 2 \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} + T \frac{\partial C}{\partial t} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n \frac{\partial^n C}{\partial x^n} \quad (19)$$

$$T \uparrow 2 \frac{\partial^2 M}{\partial t^2} + T \frac{\partial M}{\partial t} = \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{(ib)^n}{n!} M = K(bT) \cdot M \quad (20)$$

$$I.C. : M = 1, \frac{\partial M}{\partial t} = 0 \text{ at } t = 0 \quad (21)$$

$$M(b,t) = \exp\left(-\frac{t}{2T}\right) \cdot \left\{ \cosh\left(\sqrt{1+4K} \frac{t}{2T}\right) + \left[\sinh\left(\sqrt{1+4K} \frac{t}{2T}\right) / \sqrt{1+4K} \right] \right\} \quad (22)$$

$$\langle X^2 \rangle = L^2 \cdot \left\{ t/T - 1 + \exp(-t/T) \right\} \quad (23)$$

$$T \frac{\partial \langle X^2 \rangle}{\partial t} = L^2 \cdot \left\{ 1 - \exp(-t/T) \right\} \quad (24)$$

$$\langle X^3 \rangle = L^3 \cdot \left\{ t/T - 1 + \exp(-t/T) \right\} \cdot 2 \quad (25)$$

$$\text{skewness} : S = 2 / \sqrt{t/T - 1 + \exp(-t/T)} \quad (26)$$

参考文献

P.C.Chatwin (1972) J.Fluid Mech. vol.51, part 1, pp.63-67
 島田 晋 (1980) 第24回水理講演会論文集 pp.1-6