

東京工業大学大学院 学生会員 山坂昌成
東京工業大学工学部 正会員 福岡捷二

1. まえがき 従来、蛇行水路内の流れを解きこの流れの状況から蛇行の発達・移動を定性的に論ずる研究がなされた^{1,2)}。本研究では、蛇行側壁面に沿う流砂量を蛇行水路内の流れと関連させ、流砂の連続式を考慮して、蛇行の発達・移動を定量的に把握する。解析にあたって以下の仮定を行う。①平均流下(χ軸)方向の勾配は時間的に変化しない。②蛇行の頂点は平均流下方向に速度Cで移動する。③蛇行振幅の変化に伴って蛇行長Lは変化するが、蛇行波長Dは一定である。④横断面河床面は水平であり、側壁面は鉛直である。⑤川幅は一定であり、水深に比べて十分大きい。⑥主流の流速は深さ方向に一様である。⑦曲率半径は川幅に比べて十分大きい。

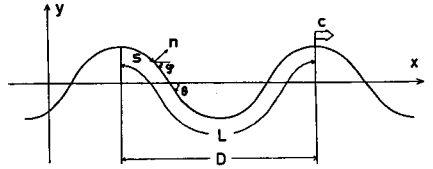


図1 記号の定義

2. 幾何条件 Sine Generated Curve に従う蛇行が、最大偏角θを時間とともに変えながら速度Cで下流に移動している。このときの側岸堆積(洗掘)速度を求める。流下距離Sを蛇行の頂点からとると、Sine Generated Curve の偏角φは(1)式に従う。(2),(3)の展開式を用いて、図1の(S,n)座標を(χ,y)座標に変換すると、(4),(5)式となる。ここで、J_n(θ)はベッセル函数である。蛇行波長Dと蛇行長Lとの関係は(6)式となる。(4),(5)の関係式を用い、Δt 間の右岸での堆積幅Δsを求める(左岸では洗掘幅)。図2のO点の(χ,y)座標をA点、B点を基準に表すと、それぞれ(7),(8)式の左辺と右辺になる。(7),(8)式を(S,n₀,t)のまわりで展開し、この連立方程式をΔs/Δtについて解き、Δt→0の極限を考えると(9)式となる。ここでn₀は川幅の半幅である。(4),(5)式を(9)式に代入すると、若干の計算のち右岸での堆積速度∂s/∂tが(10)式で与えられる。

$$\varphi = \theta \sin \frac{2\pi S}{L} \quad \dots\dots (1)$$

$$\cos(\theta \sin \frac{2\pi S}{L}) = J_0(\theta) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(\theta) \cos 2n \frac{2\pi S}{L} \quad \dots\dots (2)$$

$$\sin(\theta \sin \frac{2\pi S}{L}) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(\theta) \sin (2n-1) \frac{2\pi S}{L} \quad \dots\dots (3)$$

$$\begin{aligned} \chi &= \int_0^S C dt + \int_0^S C \cos \varphi ds + n \sin \varphi \\ &= \int_0^S C dt + J_0(\theta) S + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} J_{2n}(\theta) \sin 2n \frac{2\pi S}{L} + n \sin \varphi \end{aligned} \quad \dots\dots (4)$$

$$\begin{aligned} y &= -\int_0^S \sin \varphi ds + n \cos \varphi + y_0(t) \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} J_{2n-1}(\theta) \cos (2n-1) \frac{2\pi S}{L} + n \cos \varphi \end{aligned} \quad \dots\dots (5)$$

$$D = J_0(\theta) \cdot L(t) \quad \dots\dots (6)$$

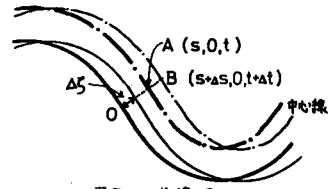


図2 堆積幅

$$\chi(S, n_0, t) = \chi(s + \Delta s, n_0 - \Delta s, t + \Delta t) \quad \dots\dots (7)$$

$$y(S, n_0, t) = y(s + \Delta s, n_0 - \Delta s, t + \Delta t) \quad \dots\dots (8)$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \chi}{\partial t} & -\frac{\partial \chi}{\partial S} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & -\frac{\partial y}{\partial S} \end{array} \right|_{(S, n_0, t)}}{\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \chi}{\partial n} & -\frac{\partial \chi}{\partial S} \\ \frac{\partial y}{\partial n} & -\frac{\partial y}{\partial S} \end{array} \right|_{(S, n_0, t)}} \quad \dots\dots (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} &= 2C J_0 \sin \frac{2\pi S}{L} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{2\pi}{L} \theta^2 \cos \frac{2\pi S}{L} \\ &\quad + 2C J_2 \sin 3 \frac{2\pi S}{L} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{2\pi}{L} \theta^2 \cos 3 \frac{2\pi S}{L} \\ &\quad + \dots\dots \end{aligned} \quad \dots\dots (10)$$

3. 流砂量 蛇行水路内の流れを解き、側壁での流速と関係づけた流砂量を求める。いま、χ軸方向に速度Cで移動する座標系で流れを見る。蛇行振幅の時間変化は十分小さいと考え、Engelund³⁾、池田らの方法を用いて移動座標系での流速を求め、固定座標系での流速に変換すると(11)式となる。ここでU₀は移動座標系での平均流速である。側壁に沿う流砂量が平衡状態のとき流速のρ乗に比例すると仮定して、右岸での流速に対応する平衡状態の単位深さ流砂量を(12)式で表現する。ここでg_{sb0}は側壁に沿う流砂量の一波長あたりの平均値であり、a_r, b_rは(11)式でn₀-n₀としたものである。流砂は非平衡状態で流れているから、非平衡の流砂量を考える。平衡状態の流砂量を単位深さあたりg_{sb}、実際に流れている流砂量をg_sとすると、単位深さ、単位流下距離あたりの洗

抵量は単位時間あたり、 $\kappa(g_{sb}-g_s)$ と考えられる。これが単位長さ
さ流下した地点の流砂量増加に等しいので(13)式が成り立つ。(12)
式を(13)式に代入し g_s について解いた(14)式が非平衡状態の流砂
量である。 κ は流速に対する流砂の遅れ距離を表すパラメーターで
あり、 κ が小さいほど遅れ距離は大きくなる。

4. 蛇行発生領域・卓越蛇行波数 幾何条件から求めた堆積(洗掘)
速度と、非平衡の流砂量とが流砂の連続式を満たすように偏角変
化率 db/dt 、移動速度 C を求める。流砂の連続式は(15)式であり、
これに(10)、(14)式を代入すると、 $J_b/J_s \ll 1$ の範囲では、 db/dt 、
 C は(16)、(17)式となる。これらの式では、蛇行発生時だけでなく
その後の蛇行形状の時間変化を定量的に把握することが出来る。
いま $\theta=0$ のときを考え、 db/dt の正負により蛇行発生領域を、 C
の正負により移動方向を、 db/dt が極大値をとる条件
より卓越蛇行波数を求める。(16)式で $L=D$ のときの
 $db/dt > 0$ なる条件を求めると(18)式となる。ここで、
 $g_0 = 2\pi h_0/D$ 、 $\kappa = f_0 \kappa$ 、 $F^2 = U^2/(gh_0)$ である。蛇行発
生時の蛇行移動方向が下流である条件は(17)式が正で
ある条件から、(19)式となる。卓越蛇行波数は(16)式
の極値条件から(20)式を満たさなければならぬ。こ
れらの計算例を図3に示す。従来、蛇行は下流にのみ
移動すると言われていたが、流砂の非平衡性の効果(

$$\left. \begin{aligned} U &= U_0 \left\{ 1 + (a \sin \frac{2\pi S}{L} + b \cos \frac{2\pi S}{L}) + \frac{C}{U_0} \cos(\theta \sin \frac{2\pi S}{L}) \right\} \\ q &= \eta \frac{U_0^2}{2gh_0} + 1 \frac{2\pi \theta}{L} \\ b &= \eta \frac{U_0^2}{2gh_0} - H^2 \frac{2\pi \theta}{L} \\ H &= \frac{2\pi h_0}{fL} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$g_{sb} = g_{s0} \left\{ 1 + P(a \sin \frac{2\pi S}{L} + b \cos \frac{2\pi S}{L}) \right\} \quad (12)$$

$$\frac{\partial g_s}{\partial S} = \kappa (g_{sb} - g_s) \quad (13)$$

$$g_s = g_{s0} \left\{ 1 + P \frac{\kappa}{(\frac{2\pi}{L})^2 + \kappa^2} \left\{ (\kappa a r + \frac{2\pi}{L} b r) \sin \frac{2\pi S}{L} + (\kappa b r - \frac{2\pi}{L} a r) \cos \frac{2\pi S}{L} \right\} \right\} \quad (14)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{1-\lambda} \frac{\partial g_s}{\partial S} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{db}{dt} = \frac{P g_{s0} \eta_0 \theta}{2 J_s (1-\lambda)} \frac{(\frac{2\pi}{L})^2 \kappa}{(\frac{2\pi}{L})^2 + \kappa^2} \left\{ \kappa \frac{U_0^2}{2gh_0} + 1 \frac{2\pi}{L} \frac{U_0^2}{2gh_0} - \frac{(\frac{2\pi}{L})^2}{(\frac{2\pi}{L})^2 + 1} \right\} \quad (16)$$

$$C = \frac{P g_{s0} \eta_0 \theta}{2 J_s (1-\lambda)} \frac{(\frac{2\pi}{L})^2 \kappa}{(\frac{2\pi}{L})^2 + \kappa^2} \left\{ \frac{2\pi}{L} \frac{U_0^2}{2gh_0} + 1 \frac{2\pi}{L} \frac{U_0^2}{2gh_0} - \kappa \frac{U_0^2}{2gh_0} - \frac{(\frac{2\pi}{L})^2}{(\frac{2\pi}{L})^2 + 1} \right\} \quad (17)$$

$$g_0^2 < f \kappa' (\frac{1}{2} F^2 + 1) + \frac{1}{2} f^2 F^2 \quad (18)$$

$$g_0^2 > \frac{\frac{1}{2} f^2 \kappa' F^2}{f (\frac{1}{2} F^2 + 1) + \kappa'} \quad (19)$$

$$g_0^6 + 2(\kappa'^2 + f^2) g_0^4 - f \left(\frac{1}{2} F^2 + 1 \right) \kappa'^3 + \frac{1}{2} f^2 F^2 \kappa'^2 - 3 f^2 \kappa'^2 + f^3 \left(\frac{1}{2} F^2 + 1 \right) \kappa' + \frac{1}{2} f^4 F^2 g_0^2 - 2 \left\{ f^2 \left(\frac{1}{2} F^2 + 1 \right) \kappa'^2 + \frac{1}{2} f^2 F^2 \kappa'^2 \right\} = 0 \quad (20)$$

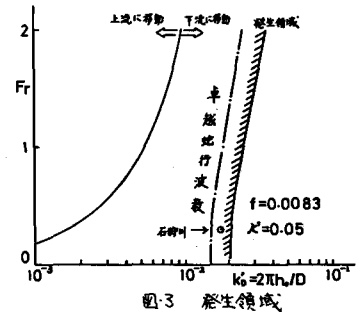


図3 発生領域

$$U_0 = \left(\frac{D}{L} \right)^{1/3} U_0, \quad h_0 = \left(\frac{D}{L} \right)^{1/3} h_0, \quad g_{s0} = \left(\frac{D}{L} \right)^{1/3} g_{s0} \quad (21)$$

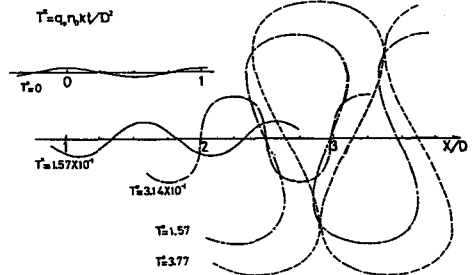


図4 蛇行形状の時間変化

5. 蛇行形状の時間変化 蛇行が発生しはじめの時から、その形状が時間と
ともにどのような変化をするかを(16)、(17)式により求める。蛇行長 L は振
幅の増大に伴ってその長さを増す。したがって流下方向の平均河床勾配は
緩かになり、平均水深、平均流速、平均流砂量も変化する。これらの物理
量を、一を付した直線水路時の物理量で表すと、(21)式とな
り、 $J_b(\theta)$ だけの関数である。したがって、最大偏角 θ を与え
れば db/dt 、 C が求まり蛇行形状の時間変化を追うことがで
きる。図4は、石狩川河口付近の物理諸量を使って蛇行形状
の変化を示したものである。 θ が大きくなると、次第に C 、
 db/dt が小さくなり、蛇行形状の変化がゆっくりしてくるが、
最終的には迂回にまで発達する。

- 1) 池田・日野・吉川「河川の自由蛇行に関する理論的研究」土木学会論文報告集 第255号 (1976)
- 2) 山岡・長谷川・山口「河川の機能に関する基礎的研究」北大工学部研究報告 (1979)
- 3) Engelund, F. "Flow and Bed Topography in Channel Bends" Jour. of Hy. Div. Hy. 11, 1974
- 4) 池田・Parker, G. 澤井「河川の蛇行に関する統一見解」第24回水理講演会論文集 (1980)