II-137　開水路に発生する縦渦の構造について

北大・工学部　正員　○黒木 幹男
北大・工学部　正員　岸 力
北海道開発局　正員　岡部 和憲

1. はじめに　開水路に発生する縦渦の卓越波長および流れの構造を理論的に解析し、さらにホットフィルム流速計を使用して、流速・レイノルズ応力を測定し、理論との比較を行なった。

2. 基礎方程式　縦渦のない基本流の流速 $\bar{q} = Q + q' = \{U(z) + u', v', w'\}$ に微小な変動成分 $\tilde{q} = \{\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}\}$ を加え、縦渦流れの流速を $q = \bar{q} + \tilde{q}$ と表わす。これを Reynold's 方程式に代入し、基本流の関係を差引くと、変動成分に対する運動方程式は

$$\frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} + (Q \cdot \nabla)\tilde{q} + (\tilde{q} \cdot \nabla) Q = \nabla \tilde{T}_{ij} \quad . \tag{1}$$

但、$\tilde{T}_{ij}$ は Reynold's stress の変動成分であり、渦動粘性係数を用いて次式の様に表わせると仮定する。

$$\tilde{T}_{ij} = \frac{\varepsilon}{u_* h}\left(\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial x_i}\right) \tag{2}$$

座標軸は主流方向に x, 横断方向に y, 鉛直方向に z をとり、x 方向に流れは homogeneous と仮定する。ここで $\tilde{T}_{zz} - \tilde{T}_{yy} = \alpha T_{xz}$ の関係を仮定し、$y \cdot z$ 方向の運動方程式から x 方向の渦度式に変形する。更に、stream function $\tilde{\Psi}$ を導入して整理すると、$\tilde{u}$ と $\tilde{\Psi}$ に関する連立微分方程式を得る。

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \frac{dU}{dz}\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial y} = \frac{1}{R_*}\nabla^2 \tilde{u} \tag{3}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\tilde{\Psi} + \frac{1}{R_*}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^2 \tilde{\Psi} = \frac{1}{R_*}\frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial y \partial z^2} \tag{4}$$

$$\text{但.}\quad \tilde{v} = \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial z}, \quad \tilde{w} = -\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial y}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad R_* = \frac{u_* h}{\varepsilon} = \mathrm{const.} \tag{5}$$

3. 卓越波長　上式の解を $\tilde{u}(y, z, t) = \hat{u}(z) \cos ky \cdot e^{\sigma t}$, $\tilde{\Psi}(y, z, t) = \hat{\Psi}(z) \sin ky\, e^{\sigma t}$ とおくと、

$$[D^2 - (k^2 + \sigma R_*)]\,\hat{u} = -kR_*^2 (1-z)\,\hat{\Psi} \tag{6}$$

$$[D^4 + (2k^2 - \sigma R_*) + k^2(k^2 + \sigma R_*)]\,\hat{\Psi} = -kD^2\hat{u} \quad . \tag{7}$$

となり、これを境界条件 $\hat{\Psi}(0) = \hat{\Psi}(1) = D^2\hat{\Psi}(0) = D^2\hat{\Psi}(1) = 0$, $D\hat{u}(0) = D\hat{u}(1) = 0$ の許に解く。$\hat{\Psi}$ に関する境界条件を充す様に $\hat{\Psi}(z) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin m\pi z$ ...... (8) とおき、(6)式に代入して $\hat{u}$ について解くと、

$$\hat{u}(z) = kR_*^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m}{a^2 + (m\pi)^2}\left[\frac{m\pi}{a} \cdot \frac{\cosh a(1-z)}{\sinh a} + (1-z)\sin m\pi z - \frac{2m\pi}{a^2 + (m\pi)^2} \cdot \cos m\pi z\right] . \tag{9}$$

$$\text{但、}\quad a = \sqrt{k^2 + \sigma R_*} \quad .$$

(8), (9)式を(7)式に代入して整理すると、係数 $C_m / (a^2 + m^2\pi^2)$ に関する連立方程式を得る。

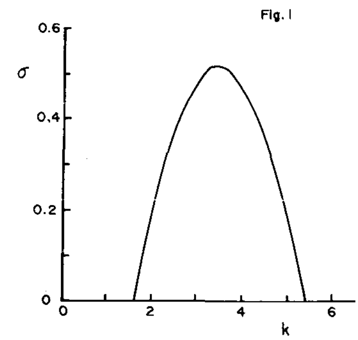
$$\left\| \frac{mn\pi}{a(a^2 + n^2\pi^2)} \cdot \frac{(-1)^{n+1} + \cosh a}{\sinh a} + \frac{\delta_{nm}}{2} \cdot \frac{a^2 + m^2\pi^2}{(akR_*)^2} \cdot \left[(n\pi)^4 - (3k^2 - a^2)(n\pi)^2 + k^2 a^2\right] + X_{nm} \right\| \cdot \left\| \frac{C_m}{a^2 + m^2\pi^2} \right\| = 0 \tag{10}$$

但、m, n は整数、δ_{nm} はクロネッカーのデルタ、X_{nm} は m, n によって決まる函数である。

$\hat{u}$, $\hat{\Psi}$ に 0 以外の有意な解が存在するためには、(10)式左辺のデターミナントが 0 でなければならない。

この条件式中のパラメータは波数kと増巾率σであり、kとσの間の充すべき関係が与えられる。第1次近似として、マトリックスの(1-1)エレメントを0におくと、図-1に示す様な関係が得られる。

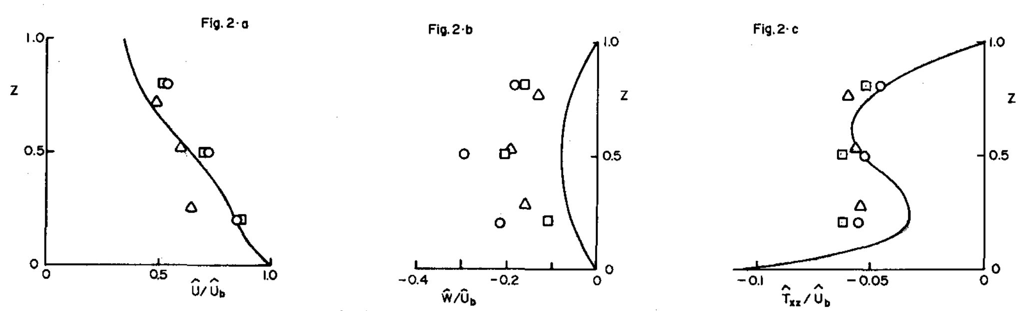
増巾率σは明らかなピークを有しており、その極大値が縦渦の卓越波数を与える。極大値はほぼ$k \doteqdot \pi$であり、これまで実験的に知られていた様に、縦渦はほぼ水深の2倍程度の波長のものが卓越することが理論的に示された。



4. 流れの構造　次に縦渦が充分に発達した定常状態の流れの構造について考える。この場合、速度や剪断力の変動の振巾は無視出来なくなるので、$\hat{u}$に関する境界条件を$\hat{u}(0)=\hat{u}_b$、$D\hat{u}(1)=0$の様に変える。ほぼ同様な過程を経て、係数は次式で与えられる。

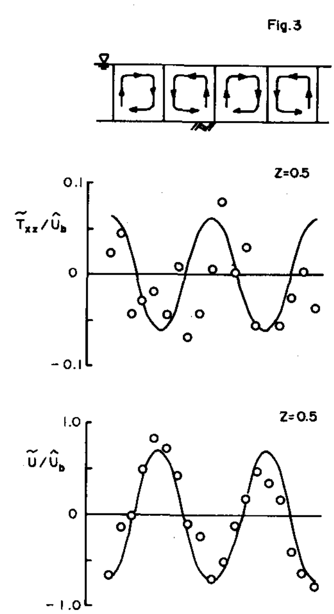
$$
\left\| \frac{2m\pi}{k^2+m^2\pi^2} \cdot \frac{n\pi}{k^2+n^2\pi^2} \cdot \frac{(-1)^{n+1}+\cosh k}{\cosh k} + X_{nm} + \frac{S_{nm}}{2} \frac{k^2+m^2\pi^2}{k^4 R_z^2} \left[(n\pi)^2 - k^2 \right]^2 \right\| \cdot \left\| \frac{C_m}{k^2+m^2\pi^2} \right\| = \left\| - \frac{\hat{u}_b}{k R_z^2} \cdot \frac{n\pi}{k^2+n^2\pi^2} \cdot \frac{(-1)^{n+1}+\cosh k}{\cosh k} \right\| \qquad (11)
$$

kに前節で求めた卓越波数を与えれば、上式より係数を決めて、$\hat{u}$、$\hat{\varphi}$を決定することが出来る。



本解析モデルでは、従来の縦渦理論[1),2)]の様に、剪断力の分布形を仮定することなく、$\tilde{u}$、$\tilde{\varphi}$、$\tilde{\tau}$などの変動量相互の関係を理論的に求めることが出来る様になった。図-2には、$\hat{u}_b$で規準化した変動成分の振巾の鉛直方向分布を、理論値と実験値[3)]を比較して示す。

図-3には、縦渦の回転方向と$\tilde{u}$および$\tilde{\tau}_{xz}$の横断方向分布の関係を示す。従来のモデルでは、縦渦の上昇部で$\tilde{\tau}_{xz}$が平均より小さくなり、実験値の傾向を説明出来なかった。本モデルでは図中の実線で示す様に、上昇部で$\tilde{\tau}_{xz}$は平均値より大きくなり、$\tilde{u}$は平均値より小さくなり、縦渦流れの構造を合理的に説明出来る。



なお本研究の一部は、文部省科学研究費(総合A、代表 岸力教授)の援助を受けた。また実験及計算には当時本学学生・寺田 文君の協力を得た。ここに記して謝意を表する。

参考文献

1) 林 泰造・山田正,「開水路における縦渦の形成に関する研究」21回水講, 1977
2) S. Ikeda, "Secondary Circulation in Straight Channels" 埼大・工・研究報告, 1976
3) 黒木幹男・岸力「河床波上の流れの縦渦の構造について」, 34回年講, 1979