II-119　山地小流域の瞬間単位図と時定数スペクトルについて

東京工業大学　工学部　正会員　山田　正

1. 目的　本研究は、いくつかの山地小流域（流域面積は数km^2以下）の瞬間単位図とその物理的意味を比較検討することを目的とするものである。

2. 理論　(i) 流出過程の構成：　一様勾配,一様土質の単位巾斜面（長さL）に降雨$r(t)$がある場合の流出は($q(t)$),著者により陽な形でその解が得られており，文献(1),(2)に発表されている。ところで得られた解に実際の流域の土質条件や降雨強度を適用すると、瞬間単位図（応答関数）$h(\tau)$は1個のタンクからの流出の場合のexponential形に非常に似た関数の挙動をしていることがわかり、このときの斜面末端からの流出量$q(t)$は(1)式で表わされる。ここにTは単位巾斜面のもつ時定数である（またv_0'を浸透流の真の流速とすると，$T=L/v_0'$になり，Tは雨水の到達時間でもある）。

ところで流域全体からの流出量$Q(t)$は上記(1)式で与えられる単位巾斜面からの流出量$q(t)$に各時定数Tによって決る重み$\varphi(T)$を掛けて加え合わせたものとなり，(2)式で表わされる。以後$\varphi(T)$を時定数スペクトルと呼ぶ。ところで上述の非常に理想化された流域からの流出とは異り，実際の複雑な土質条件のもとでの単位巾斜面の瞬間単位図は,一般にガンマ分布様の形をしていることが考えられる。よって(2)式のexponentialのかわりにガンマ分布を用いると，より一般形に書き改められ,(3)式で表現される。このとき、(3)式の(*)で示した項を$h(\tau)$とすると，これがいわゆる通常の流域全体でみたときの瞬間単位図となっている。((4)式)

本研究の目的は$h(\tau)$と$\varphi(T)$を求め，それらを流域ごとに比較検討することにあるのだが，その前に有降雨量に関して議論する。以後は有効雨量に対し$u(t)$を用いる。

(ii) 有効雨量$u(t)$に関して：　本研究では$u(t)$として中安法の一般化である累積雨量 — 累積損失量の関係を時間領域にもち込んでいる。即ち一雨降雨の総降雨量Rと総損失量q_lの関係を流域ごとに求めておき，$q_l=F(R)$の関係式を与えておく。次にこの関係の時間領域での成立を仮定すると(5),(6)式が成立している。(6)式の両辺をtで微分すると(6)式を得る。以後は(6)式で与えられる有効雨量$u(t)$を(3)式中の$r(t)$のかわりに用いる。

$$q(t)=\int_0^t \frac{1}{T}e^{-\frac{\tau}{T}}r(t-\tau)d\tau \quad (1)$$

$$Q(t)=\int_0^\infty \varphi(T)q(T,t)dT$$
$$=\int_0^\infty \varphi(T)\int_0^t \frac{1}{T}e^{-\frac{\tau}{T}}r(t-\tau)d\tau dT \quad (2)$$

$$Q(t)=\int_0^\infty \varphi(T)\int_0^t \frac{T^{-1}}{\Gamma(m)}\left(\frac{\tau}{T}\right)^{m-1}e^{-\frac{\tau}{T}}r(t-\tau)d\tau dT$$
$$=\int_0^t r(t-\tau)\underbrace{\int_0^\infty \varphi(T)\frac{T^{-1}}{\Gamma(m)}\left(\frac{\tau}{T}\right)^{m-1}e^{-\frac{\tau}{T}}dT}_{\substack{(*)\\ h(\tau)}}d\tau \quad (3)$$

$$h(\tau)=\int_0^\infty \varphi(T)\frac{T^{-1}}{\Gamma(m)}\left(\frac{\tau}{T}\right)^{m-1}e^{-\frac{\tau}{T}}dT \quad (4)$$

$$R(t)=\int_0^t r(\tau)d\tau \quad (5)$$

$$q_l(t)=\int_0^t \{r(\tau)-u(\tau)\}d\tau \quad (6)$$

$$\frac{\partial q_l}{\partial R}\frac{dR}{dt}=\frac{\partial F}{\partial R}r(t)=r(t)-u(t) \quad (7)$$

$$u(t)=r(t)\left\{1-\frac{\partial F}{\partial R(t)}\right\} \quad (8)$$

$$\Gamma(m)\tau^{1-m}h(\tau)=\int_0^\infty p^{m-2}\varphi_0(p)e^{-p\tau}dp \quad (9)$$

$$p^{m-2}\varphi_0(p)=p^{m-2}\varphi(T)=\frac{1}{2\pi i}\int_{r-i\infty}^{r+i\infty}e^{p\tau}\Gamma(m)\tau^{1-m}h(\tau)d\tau \quad (10)$$

$$f(p)=\frac{1}{2\pi i}\int_{r-i\infty}^{r+i\infty}e^{p\tau}g(\tau)d\tau\simeq\left[-\tau^2\frac{dg(\tau)}{d\tau}\right]_{\tau=1/p} \quad (11)$$

$$\varphi(T)\cong-\Gamma(m)\left[(1-m)h(T)+Th'(T)\right] \quad (12)$$

$$Q(t)=\int_0^t h(\tau)\cdot u(t-\tau)d\tau \quad (13)$$

$$h(\tau)=\sum_{i=1}^{N}C_i P_i(\tau) \quad (14)$$

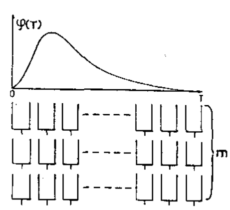
$$Q(t_j)=\sum_{i=1}^{N}C_i\int_0^{t_i}u(t-\tau)P_i(\tau)d\tau \quad (15)$$

(iii)　時定数スペクトル$\varphi(T)$：　(4)式は瞬間単位図と時定数スペクトルとの関係を与えるものであるが，これは，本来振動系ではなくて減衰系である流出過程をそれにふさわしい関数(exponential)で展開したことに相当している。　ところで今$h(\tau)$が与えられたとき，$\varphi(T)$を決定する方法を考える。ここで$p=1/T$とおき，(4)式を書き改めると，$\varphi(1/p)\equiv\varphi_0(P)$とおいて，(9)式を得る。さらに(9)式の右辺の積分はLaplace変換になっていることより，これを逆変換し$\varphi(T)$を求めると(10)式となる。(10)式の積分(Laplace逆変換)の実行は数値計算として可能であるが，ここではLaplace逆変換に関するAlfreyの近似式(11)式を用い，$\varphi(T)$として(12)式を得る。(iV)　瞬間単位図の求め方：　瞬間単位図$h(\tau)$は(3)式を書き改めて($r(\tau)$は$u(\tau)$として)，(13)式となる。一般に逆問題の積分方程式として$h(\tau)$を求めることは数値不安定がつきまとい困難である。よってここではスプライン関数を用いて$h(\tau)$を求めた。即ち(13)式の未知関数$h(\tau)$をB−spline関数で(14)式の様に表現する。式中の未知数C_iを求めるために(14)式を(13)式に代入し，$Q(t)$の既知数n_jに対し，N_jの未知数C_i $(n \geqq N)$に関する連立方程式(15)式を解く。

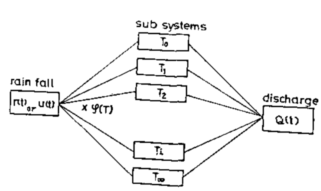
3．計算結果および考察：まず本研究で展開した理論構成を模式的に示すと，図−1，図−2となる。上述の理論展開と図−1，2より，時定数スペクトル$\varphi(T)$のもつ意味は，(A)：流域のもつ各々異った時定数Tのサブシステムの流域全体に対する面積比率を表わしていると解釈される。(B)：有効降雨の各サブシステムへの分配率を表現したものと解釈される。(それぞれ図−1，2より)　上記A，Bの2通りの解釈は従来より既に別個に確立されては来たが，それらは本質的に同一の内容を異った表現で言っているのであることが本研究により明らかにされた。図−3は多くの小流域で得られた総降雨量R−総損失量q_lの関係$q_l=F(R)$の模式的に示したものであり，①を例えばHorton式に，②は初期損失・一定比率方式に，③は初期一括損失方式に，④は一定比率方式に各々対応している。図−4(a)，(b)，(c)は上記(iV)の手法で得られた3つの山地小流域での瞬間単位図$h(\tau)$を，図−5(a)，(b)，(c)は図−4の$h(\tau)$に対応する(12)式で計算された時定数$\varphi(T)$をそれぞれ示している。それらの解釈は講演時に発表する予定である。

参考文献　(1) 吉川・山田・オ34回年講(1979)，(2) 吉川・山田・東工大土木研究報告 NO.25(1979)
(3) 伊藤・平野・オ22回水講(1978)，(4) 四俵・土木学会論文報告集，オ245号(1976)

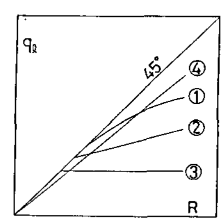
謝辞　本研究で用いた資料は山梨大学荻原能男教授，建設省土木研究所石崎勝義室長より戴いたものであり，紙面を借りて謝意を表します。



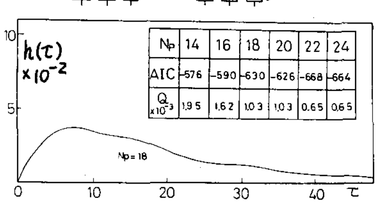
図−1



図−2

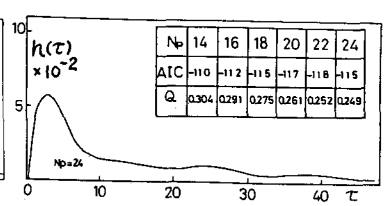


図−3



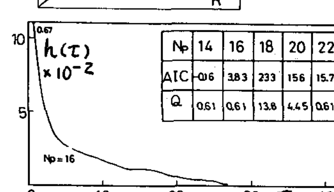
Np	14	16	18	20	22	24
AIC	−576	−590	−630	−626	−668	−664
Q ×10⁻³	1.95	1.62	1.03	1.03	0.65	0.65

図−4(a)



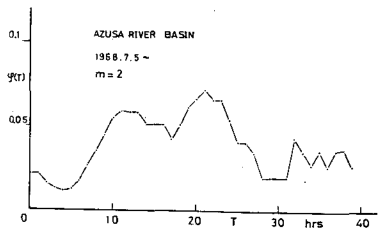
Np	14	16	18	20	22	24
AIC	−110	−112	−115	−117	−118	−115
Q	0.304	0.291	0.275	0.261	0.252	0.249

図−4(b)

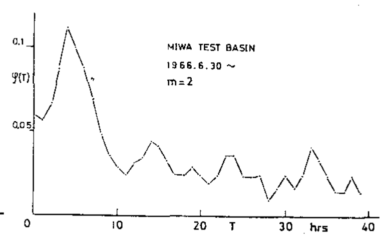


Np	14	16	18	20	22
AIC	−0.6	3.83	23.3	15.6	15.7
Q	0.61	0.61	13.8	4.45	0.61

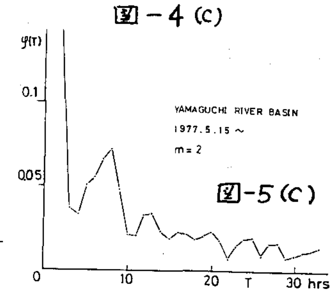
図−4(c)



図−5(a)



図−5(b)



図−5(c)