II-104　確率過程的kinematic waveモデルについて

京都大学工学部　正員　椎葉充晴
京都大学工学部　正員　高棹琢馬

1. 序論

kinematic wave モデルでは，初期時刻 t_0 での水深分布と降雨入力を確定すると，その後の水深分布，流出流量も確定する。この意味で，kinematic wave モデルは"決定論的"あるいは"確定過程的"モデルである。しかし，実際の降雨・流出現象をこのような"確定過程的"モデルで完全に記述することはできず，何らかの誤差が介在するものと考えるべきである。本研究では，そのような誤差を補償する攪乱項を導入した"確率過程的"kinematic wave モデルを考え，その統計的性質を議論する。このような議論はkinematic wave モデルを用いる流出予測理論の基礎となるものである。

2. "確率過程的"kinematic wave モデル

次のような単一要素の"確率過程的"kinematic wave モデルを考察する。

$$\partial h/\partial t + \partial q/\partial x = r(t) + v(t),\ t \geq t_0,\ 0 \leq x \leq 1 \quad (1) \qquad q = \alpha h^m \quad (2)$$

$$h(0,t) = 0,\ t \geq t_0 \quad (3) \qquad Q(t_k) = \mu F q(1, t_k) + w_k,\ k = 1, 2, \cdots,\ t_0 < t_1 < \cdots \quad (4)$$

ただし，位置を表わす独立変数 x は無次元化されており，h, q は位置 x，時刻 t の関数である。q は降雨強度の次元を持つ。(2)は q と h の関係式で，$\alpha > 0$, $m \geq 1$ は定数，(3)は境界条件，(4)は時刻 t_k での流出流量 $Q(t_k)$ を表わす式で，$0 < \mu \leq 1$ は定数，F は流域面積である。攪乱 $\{v(t), t \geq t_0\}$ は，初期水深 $\{h(x, t_0), 0 \leq x \leq 1\}$ とは独立な白色正規過程，攪乱 $\{w_k, k = 1, 2, \cdots\}$ は，初期水深 $\{h(x, t_0), 0 \leq x \leq 1\}$，攪乱 $\{v(t), t \geq t_0\}$ とは独立な白色正規系列であり，次のような統計的パラメータを持つことがわかっているとする。

$$E[v(t)] = 0,\quad E[v(t)v(\tau)] = V\delta(t-\tau),\ V > 0,\ t, \tau \geq t_0 \quad (5)$$

$$E[w_k] = 0,\quad E[w_k w_j] = W\delta_{kj},\ W > 0,\ k, j = 1, 2, \cdots \quad (6)$$

初期水深 $\{h(x, t_0), 0 \leq x \leq 1\}$ も正規分布をなすとし，

$$E[h(x, t_0)] = \hat{h}(x, t_0),\ \mathrm{Cov}[h(x, t_0), h(y, t_0)] = p(x, y, t_0) \quad (7)$$

なる平均値関数，共分散関数をもつとする。

3. 平均値関数，共分散関数の推移式

3.1 確定降雨の場合　本節では，降雨強度 $r(t)$ が確定している場合に，水深 $\{h(x, t), 0 \leq x \leq 1\}$ の確率分布の推移を考察する。たとえば，$t_0 \leq t \leq t_1$ での降雨強度 $r(t)$ を観測した後，この間の水深の確率分布の推移を考える場合がその例である。(2)で $m > 1$ であれば，水深の確率分布の推移を厳密に求めることは容易でないので、水深に対して次のような参考関数を定め，その回りに水深の推移式を線形化して議論を展開する。すなわち、まず、初期・境界値問題

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\{\alpha \bar{h}^m\} = r(t),\ \bar{h}(0, t) = 0,\ \bar{h}(x, t_0) = \hat{h}(x, t_0) \quad (8)$$

を満たす参考関数 $\bar{h}(x, t)$ を用いて，$h(x, t)$ の推移式を

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\{c(x,t)(h - \bar{h}) + \alpha \bar{h}^m\} = r(t) + v(t),\ h(0, t) = 0 \quad \left(c(x,t) = \alpha m \{\bar{h}(x,t)\}^{m-1} \right) \quad (9)$$

と近似する。これは h に関して線形であるから，$t > t_0$ での水深 $\{h(x, t), 0 \leq x \leq 1\}$ も正規分布に従う。よって，平

均値関数 $\hat{h}(x,t)=E[h(x,t)]$, 共分散関数 $p(x,y,t)=Cov[h(x,t),h(y,t)]$ を求めると, 水深 $\{h(x,t), 0\leq x\leq 1\}$ の確率分布が求められたことになる。(9)より(8)を引き, $e(x,t)=h(x,t)-\bar{h}(x,t)$ とおくと,

$$\frac{\partial e}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\{c(x,t)e\}=v(t), \quad e(0,t)=0 \tag{10}$$

を得る。(5), (8), (10)より, $E[e]=0$, よって, $\hat{h}(x,t)=\bar{h}(x,t)$ を得る。すなわち, (8)で $-$ を $\wedge$ にかえた式が平均値関数の推移式である。一方, (10)の解を積分形式で表わし, (5)を用いると, 共分散関数 $p(x,y,t)$ の推移式

$$\frac{\partial}{\partial t}p(x,y,t)+\frac{\partial}{\partial x}\{c(x,t)p(x,y,t)\}+\frac{\partial}{\partial y}\{c(y,t)p(x,y,t)\}=V \tag{11}$$

が得られる。境界条件は, $p(0,y,t)=p(x,0,t)=0$ である。

3.2 不確定降雨の場合

本節では, 降雨強度 $r(t)$ が,

$$r(t)=r_0=\text{const.}, \quad E[r_0]=\hat{r}_0, \quad Var[r_0]=R>0 \tag{12}$$

を満たし, $\{v(t), t\geq t_0\}$ とは独立な正規変数である場合を考える。これは, 降雨も予測して水深を予測する場合である。今度は, 降雨 $r(t)$ と水深 $h(x,t)$ との共分散関数 $p_r(x,t)=Cov[r(t),h(x,t)]$ の推移も考慮する必要がある。(8)で, $r(t)$ を $\hat{r}_0$ とおいて得られる参考関数 $\bar{h}(x,t)$ を用いて、前節と同様な議論をすると, 平均値関数は $\hat{h}(x,t)=\bar{h}(x,t)$ として求められ, また共分散関数 $p(x,y,t)$, $p_r(x,t)$ の推移式は,

$$\frac{\partial}{\partial t}p(x,y,t)+\frac{\partial}{\partial x}\{c(x,t)p(x,y,t)\}+\frac{\partial}{\partial y}\{c(y,t)p(x,y,t)\}=V+\frac{\partial}{\partial x}p_r(x,t)+\frac{\partial}{\partial y}p_r(y,t) \tag{13}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}p_r(x,t)+\frac{\partial}{\partial x}\{c(x,t)p_r(x,t)\}=R \tag{14}$$

で与えられる。境界条件は, $p(0,y,t)=p(x,0,t)=p_r(0,t)=0$ である。

4. フィルタリング

時刻 t_k に流量 $Q(t_k)$ が観測されると, これは, 水深 $\{h(x,t_k), 0\leq x\leq 1\}$ の確率分布に対する1つの情報を与える。(4)のかわりに, 仮に線形観測式

$$z_k=a\,h(1,t_k)+b+w_k \tag{15}$$

を考えると, 水深 $\{h(x,t_k), 0\leq x\leq 1\}$ の事後分布は正規分布であって, 事後平均値関数 $\hat{h}^+(x,t_k)$, 事後共分散関数 $p^+(x,y,t_k)$ は, 利得関数 $k_x=a\,p(1,x)/(W+a^2p(1,1))$ を用いて

$$\hat{h}^+(x,t_k)=\hat{h}(x,t_k)+k_x(z_k-a\hat{h}(1,t_k)-b) \tag{16}$$

$$p^+(x,y,t_k)=p(x,y,t_k)-k_x\,a\,p(1,y,t_k) \tag{17}$$

として求められる。ただし, $\hat{h}$, p は3で述べた方法で求められる事前の平均値関数, 共分散関数である。(4)は $h(1,t_k)$ に関して非線形であるから, $h^*=\hat{h}(1,t_k)$ の回りに線形化すると

$$Q(t_k)=(\mu F\alpha m h^{*m-1})h(1,t_k)+(1-m)\mu F\alpha h^{*m}+w_k \tag{18}$$

となって, (15)と同形になるから, (16),(17)の事後推定式が適用できる(拡張Kalman フィルター)。こうして得られた事後推定 $\hat{h}^+(1,t_k)$ を再び h^* として上記の過程を反復することも考えられる(反復拡張 Kalman フィルター)。

5. 結論

"確率過程的" kinematic wave モデルを導入し, 水深の統計量—平均値と共分散の推移式を導いた。実流域に適用するときは, 撹乱項の統計的パラメータの決定が必要であるが, これについては別の機会に論じる。