II-94　流出系のフィルタリングと予測に関する基礎的研究（第2報）

京都大学大学院　学生員　宝　馨
京都大学工学部　正　員　高棹琢馬
京都大学工学部　正　員　椎葉充晴

1. 序論

筆者らは，気象・流出システムを状態空間法によるモデルで表現し，Kalman流のフィルタリング・予測理論を適用した流出予測について検討してきた。その結果，システム方程式に存在するシステムパラメータおよび攪乱項の統計的パラメータが既知であるという仮定のもとには，精度のよい流出予測が可能であることを導き出した。しかし，それらのパラメータは一般に未知であるので，上のように既知であるとする仮定は実際的でない。本研究では，その未知パラメータの逐次推定方式を新たに提案するとともに，その方式を実流域に導入して流出予測を行ない，検討を加える。

2. 流出予測の概要

気象・流出システムは，次のように状態空間法によってモデル化されていると仮定する。

気象システム：　$a_{k+1} = \phi(t_k, a_k) + \alpha_k$　(1-a)，　$r(t) = \psi(t_k, a_k) + \beta_k$ ，$t_k < t \leqq t_{k+1}$　(1-b)

流出システム：　$dx(t)/dt = f(t, x(t), r(t)) + w(t)$　(2-a)，　$y_k = g(t_k, x(t_k)) + v_k$　(2-b)

ただし，a_k は時刻t_kでの気象システムの状態ベクトル，$r(t)$は時刻tの降雨強度，α_k，β_k はともに平均値0の攪乱項，$x(t)$は時刻tでの流出システムの状態ベクトル，y_kは時刻t_kの流出流量，$w(t)$，v_k はともに平均値0の攪乱項，ϕ, ψ, f, g は既知関数である．攪乱項は相互に独立で，時間的に白色な正規過程であるとする．

よりよい予測をするには，現在の状態をよりよく知ること――フィルタリング――が必要である。過去の降雨は観測により既知となっているから，両システムのフィルタリングは個別にできる．とは言うものの，予測にあたっては，両システムを統合して考える必要があり，統合したシステムの状態ベクトル $X(t) = [a(t)^T, r(t), x(t)^T]^T$ を導入する。ただし，$a(t)$ は $t_k < t < t_{k+1}$ で a_k と定める。そうすると，$X(t)$の推移は，時刻 t_kから t_k^+ へ離散的に推移する部分と，$t_k < t \leqq t_{k+1}$ の間で連続時間で推移する部分の2つの部分よりなる。$X(t)$の定義と上の(1)，(2)式とから，前者の部分では $X(t_k^+)$ を $X(t_k)$ で表わす推移式が，後者の部分では $dX(t)/dt$ を $X(t)$ で表わす式が得られる。筆者らの従来の研究では，$r(t)$を統合システムの状態量に入れていないが，この“余分な”量を追加することによって，離散時間で定義された攪乱項と連続時間で定義された攪乱項が状態方程式の中に同時に存在することがなくなるので，平均値，共分散行列の予測式の誘導が簡明となる利点がある。

3. パラメータの決定

攪乱項を除いた場合の(1)，(2)式のようなモデルは動的システムを記述するのによく用いられており，特に既存の流出モデルの大半は状態ベクトルを適当に選べばこの型となる。(2)式は，これらの決定論的モデルに，モデル誤差を補償する攪乱項を陽に付加して，確率論的モデルに変換したものと考えられる。

実流域への適用にあたっては，システムパラメータの決定および付加された攪乱項の統計的パラメータの決定が必要である。

i）システムパラメータの同定　　従来，流出システムのパラメータの同定手法は，過去の降雨・流量データのみに依存した。ここでは，時々刻々入手される降雨・流量データを用いて，観測の進行とともに逐次的にシステムパラメータを同定してゆく。そのために，次のような工夫を凝らす。すなわち，不確かなパラメータをUとするとき，状態ベクトル$X(t)$ の次元を（いま，n次元であるとすると$n+1$次元に）増やして，新たな状態量 $x_{n+1} = U$を定義し，この追加した状態量 x_{n+1} の状態方程式として，$dx_{n+1}/dt = 0$ を加えるのである。この

ように，システムパラメータを状態量に組み込むことによって，$\hat{x}_{n+1}$が精度を高めつつ逐次推定されてゆくことになる。

ii）撹乱項の統計的パラメータの推定　　まず，次のような離散時間の線形システムを考える。

$$x_{k+1} = \Phi_k x_k + w_k \quad (3\text{-a}), \qquad y_{k+1} = H_{k+1} x_{k+1} + v_{k+1} \quad (3\text{-b})$$

ただし，x_k は時刻t_kでの状態ベクトル，y_{k+1}はスカラーの観測値であり，Φ_k, H_{k+1}は適当な次数をもつ非確率行列，w_k, v_{k+1} は互いに独立，時間的に白色の平均値０の正規確率変数またはベクトルであって，$E[w_k w_k^T] = \lambda G_k$, $E[v_k v_k^T] = V_k$ とする。このとき，$\lambda > 0$を未知パラメータとして，これを逐次推定していく方法を考える。紙数の都合で結論だけを述べることにする。

時刻t_kまでのλの推定値を$\hat{\lambda}_k$，その推定誤差の分散を$P_\lambda(k)$と表わすことにし，観測値y_{k+1}が得られると，

$$\lambda_{k+1} = [\{y_{k+1} - H_{k+1}\hat{x}(k+1|k)\}^2 - H_{k+1}\Phi_k P_x(k|k)\Phi_k^T H_{k+1}^T - V_{k+1}] / (H_{k+1} G_k H_{k+1}^T) \quad (4)$$

としてλの推定値λ_{k+1}を求め，最初$\xi_0 = \hat{\lambda}_k$とおいて，$l = 1, 2, \cdots$ について，

$$z_l = 2[H_{k+1}\{\Phi_k P_x(k|k)\Phi_k^T + max\{0, \xi_{l-1}\}G_k\}H_{k+1}^T]^2 / (H_{k+1} G_k H_{k+1}^T)^2 \quad (5\text{-a})$$

$$\xi_l = (\hat{\lambda}_k / P_\lambda(k) + \lambda_{k+1}/z_l) / (1/P_\lambda(k) + 1/z_l) \quad (5\text{-b})$$

なる計算を反復し，得られる系列$\{\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_l\}$が収束したと判定されたら，

$$\hat{\lambda}_{k+1} = \xi_l \quad (6\text{-a}), \qquad P_\lambda(k+1) = P_\lambda(k) z_l / (P_\lambda(k) + z_l) \quad (6\text{-b})$$

とおく。ただし，(4),(5)式中の$\hat{x}(k+1|k)$，$P_x(k|k)$ はそれぞれ時刻t_kまでの観測情報によるx_{k+1}の条件つき期待値，x_k の条件つき共分散行列である。$\hat{x}(k+1|k+1)$，$P_x(k+1|k+1)$の計算をするときには，$\lambda = \hat{\lambda}_{k+1}$と仮定していく。もとにもどって，(2-a)式中の$w(t)$について，$E[w(t)w(\tau)] = \lambda G(t)\delta(t-\tau)$とし，$\lambda$が未知パラメータの場合を考えると，準線形化によって，(2)式は(3)式の形に変換されるから，上述の方法が適用できる。

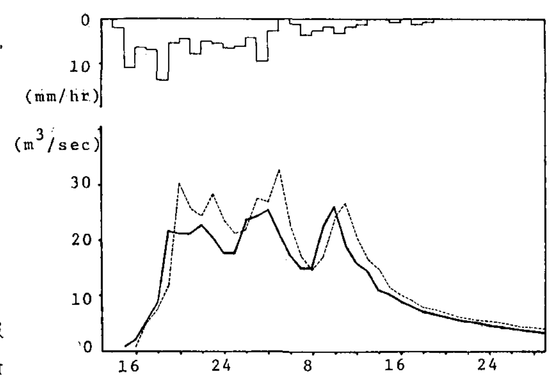

Fig.1

4．流出予測 ― 実流域への適用

気象システムモデルとして簡単なランダムウォークモデルを，流出システムモデルとして非線形貯水池モデルを考え，愛知県猪子石流域（27 km²）の出水を予測（１時間後予測）した一例が右図である。Fig.1は，棒グラフが降雨を，折れ線の実線が実測流量，破線は予測流量の推移をそれぞれ示している。Fig.2はその予測残差とその標準偏差の予測値を示している。

5．検討

他の適用例もあわせて検討すると，予測残差に持続性が認められる。これは，撹乱項が時間的に白色であるとした仮定が成立しない可能性があることを示しているので，今後，撹乱項が有色の場合をも考慮した予測方式を考えてゆくことも必要となろう。

〈参考文献〉

高棹琢馬・椎葉充晴：流出システムのフィルタリングと予測，第16回自然災害科学総合シンポジウム概要集，pp. 133－136。

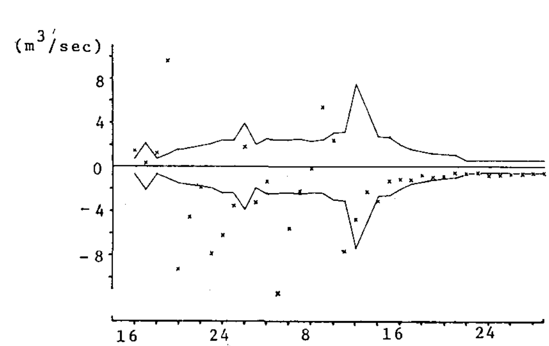

Fig.2