

東京都立大学工学部 O正員 新井邦夫

東京都立大学工学部 正員 井原隆雄

1. はじめに

我々は、通常、ある予測の信頼度を、並記される予測誤差によって知る事ができる。流出解析の目的が流量予測にあるとすれば、やはり先の予測誤差を明らかにしておかねばならない。この場合、よく議論されてきた解析誤差と同時に、モデルの係数の不確実性にも関心が向けられねばならない。なぜなら、そもそも流出モデルは多様な不確実因子によって構成される現象を単純化したものであり、又、キャリブレーションのためのデータ上のものに強い不確実性があるため、確信した係数を期待することは、たとえ個々の流域に限ったとしても、ほとんど不可能に近いと考えられるからである。

本報告は我が国において有名なモデルの一つである統合貯留関数法を例に、係数からハイドログラフへの誤差伝達計算法を提示し、2・3の考察を加えたものである。

2. 統合貯留関数法

これは本村によつて次のように定義された¹⁾。

$$S/f = K(Q/f)^P \quad (1)$$

$$(1/f)(dS/dt) = I - Q/f \quad (2)$$

ここにSは単位面積当りの貯留量、Iは単位時間当りの降雨量、Qは単位面積、単位時間当りの流出量である。K、Pは定数とそれぞれ40.3、0.5とされている。流入係数fは雨量によって果たるとされているが、ここは簡単のために降雨期間中一定と考える。

又、同様の理由から、本論では遅れ時間は考慮しない。

上述の本村の論文を一読すれば、Pはともかく、fにしろ、Kにしろ、それらの不確実性を決して無視することは出来ないことを認識される。

3. 計算ハイドログラフの不確実性

係数の不確実性が計算値にどれ程影響するかを知り

手段の一つは、算出値の分散を知ることである。

ある変量が複数の確率変数の関数と与えられている場合、すなわち、

$$Y = g(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (3)$$

の場合、Yの平均と分散の1次近似は次のように与えられる²⁾。

$$E[Y] \approx g(E[X_1], E[X_2], \dots, E[X_n]) \quad (4)$$

$$\text{Var}[Y] \approx \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} \bigg|_{E} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j} \bigg|_{E} \text{COV}[X_i, X_j] \quad (5)$$

ここにE、Var、COVはそれぞれ平均、分散、共分散を意味する。

ここぞ、後の計算の都合上、次の2式を定義しておく。

$$\text{Var}[X] = \{E[X] \cdot V[X]\}^2 \quad (6)$$

$$\text{COV}[X_i, X_j] = P \cdot E[X_i] \cdot E[X_j] \cdot V[X_i] \cdot V[X_j] \quad (7)$$

ここにVは変動係数を意味し、Pは相関係数である。

P=1/2の場合、(2)式を差分化し、Qiについて解くと、

$$Q_i = \{A - Kf^{\frac{1}{P}} / \Delta t\}^2 \quad (8)$$

$$\text{ただし } A = \sqrt{(Kf^{\frac{1}{P}} / \Delta t)^2 + (Kf^{\frac{1}{P}} Q_{i-1}^{\frac{1}{P}} / \Delta t)^2} - S f I - Q_{i-1}$$

を得るから、Qiの平均および分散は、(4)・(5)式に従つて計算すると次のようになる。ただし $\Delta t=1$ としている。

$$E[Q_i] = (A - Kf^{\frac{1}{P}})^2 \quad (9)$$

$$\text{Var}[Q_i] = \{2f^{\frac{1}{P}}(A - Kf^{\frac{1}{P}}) \times Kf^{\frac{1}{P}} + Q_{i-1}^{\frac{1}{P}} - A\}^2 \text{Var}[K]$$

$$+ \{(A - Kf^{\frac{1}{P}}) \times K^2 + 2I + Kf^{\frac{1}{P}} Q_{i-1}^{\frac{1}{P}} - Kf^{\frac{1}{P}} A\}^2 \text{Var}[f]$$

$$+ \{(A - Kf^{\frac{1}{P}})(Kf^{\frac{1}{P}} Q_{i-1}^{\frac{1}{P}} - 1) / A\}^2 \text{Var}[Q_{i-1}]$$

$$+ \{2f^{\frac{1}{P}}(A - Kf^{\frac{1}{P}}) \times (Kf^{\frac{1}{P}} + Q_{i-1}^{\frac{1}{P}} - A)(Kf^{\frac{1}{P}} Q_{i-1}^{\frac{1}{P}} - 1) / A\}^2 \text{COV}[K, Q_{i-1}]$$

$$+ \{(A - Kf^{\frac{1}{P}}) \times (K^2 + 2I + Kf^{\frac{1}{P}} Q_{i-1}^{\frac{1}{P}} - Kf^{\frac{1}{P}} A \times Kf^{\frac{1}{P}} Q_{i-1}^{\frac{1}{P}}) / A\}^2 \text{COV}[f, Q_{i-1}] \quad (10)$$

ここで $COV[K, f] = 0$ は明らかであるので、先の項は省略した。又、(9)式の右辺、および(10)式の右辺の各係数については、表現上の煩雑さを避けるために平均値であることを表示(例えば $E[K] \cdot \{E[f]\}^{1/2}$)を略している。

以上によって Q の分散、そして変動係数が算出でき、したがってこれに示すチェビシェフの不等式の利用によって、 Q の信頼区間を知ることができる。

$$P\{E[Q] - 1/AV(Q) \leq Q \leq E[Q] + 1/AV(Q)\} \geq 1 - \alpha \quad (11)$$

4. 数値例

図-1に示した降雨からの平均ハイドログラフは、流入係数が0.7の場合、(9)式より・印のように算出される。

さて $V[K] = V[f] = 0.1$ を想定してみよう。

$P_{K=0.1} = 1$, $P_{f=0.1} = 1$ は明らかである。この時(11)式右辺を0.8とすると、左辺で定義される Q の変域は、図の斜線部として示される。つまり、 K と f に関し、変動係数を0.1とする不確実性を考慮することによって、予測されるハイドログラフは80%の確率で、図の斜線範囲内に入ると言えることになる。又、流出ハイドログラフが上側の乗線以外におさまる確率は90%であるともしよう。

5. 問題点

採用に当たっての問題は、主として $V[K]$, $V[f]$ の決定法と、チェビシェフ式の信頼性にあるかと思う。前者に関しては、本質的にはこれらの決定は設計者に委ねられねばならないと考えているが、本村の結果に基づく限り、両者共に少なくとも0.1以上であらねばならない。

後者に関しては、統計的により厳密な解を求めるためには、母数推定法のどれかを用いねばよい。レガレ、チェビシェフ式も決して不満足な結果を示すものではない。図-2に、 $K(=40.3)$, $f(=0.7)$ が共に変動係数0.1を有する一様分布と仮定した時、図-1の降雨に対し、ピーク流量のとりうる値の累積分布を示した。図-1に示したチェビシェフ式による範囲と累積分布から読みとれる80%領域との一致性は極めて良好である。

以上の方法は、単に流出予測の近似度を向上させたことにとどまらず、その結果が採用性に富むものであることを強調したい。例えば、計画ハイドログラフの決定に際し、本法を用いれば、ある降雨から想定される流出ハイドログラフ座を考慮したことになるし、任意の確率を有するハイドログラフを計画ハイドログラフとして選定できる。

なお、 $P=1/2$ および $1/2$ に限られるけれども、一般の貯留関数法における Q の平均および分散は、(4), (5)式を用いて容易に導出できることを付言しておく。

引用文献

- 1) 本村隆見 ヤ14回建設院報告
- 2) 伊藤孝, 亀田弘行 (訳) 土木・建築のための確率統計の基礎 花巻 P.196

図-1. 統合貯留関数法による予測とその誤差

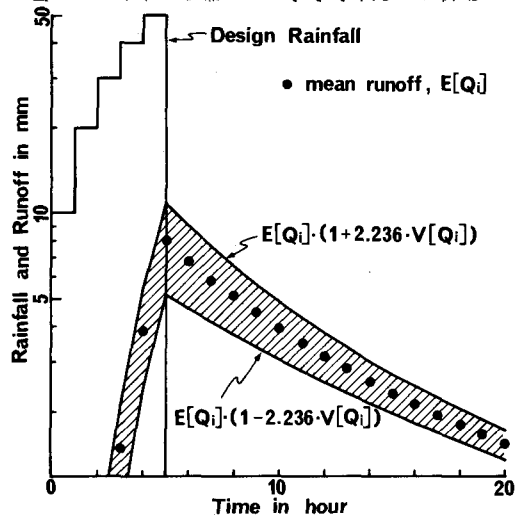


図-2. ピーク流量の累積分布

