

近畿大学 正員 西村 克己
近畿大学 正員 江藤 剛治

1. はじめに

筆者らは、多地点日降水量時系列のシミュレーションモデルを開発してきた。しかしながら降水量のみに着目した解析ではおのずと限界があるので、現在降水量を含む多くの気象要素間の相関構造を調べている。降水量のみに注目している場合には、0.0~0.5mm/dayの小雨量は、量的にほとんど無視できるので、従来これらを無降水に含めて確率分布形の検討等を行うことも多かった。しかしながら降水量と気温・蒸発散量などの気象量との関係を検討するような場合には、これら小雨量も無視できない貴重な情報となるはずである。小雨量を含めると日降水量の確率密度関数は指数分布から極端に歪んでしまうので、分布形の再検討を行った。取り上げた確率分布形はガンマ分布、超ガンマ分布(3パラメーター・ガンマ分布)、および降水事象の生起は純ランダムで、各降水事象における総雨量はガンマ分布に従うとして導かれる分布(ここでは、ポアソン・ガンマ分布と呼ぶ)の3種である。パラメーター推定にはいずれも最尤法を用いた。超ガンマ分布については最尤解がないと見られる月があるなど、若干の興味ある結果もあったので、これらについてはやや詳細に検討した。

2. 降水量の確率分布形

ここで検討を行う3種の確率密度関数および尤度方程式を表-1に示す。

ガンマ分布は、形状母数と尺度母数のわずか2つの母数を推定することで種々の水文量の確率分布を表しうることで、ガンマ分布の和もまたガンマ分布に従うという再現性により、広く水文量の確率分布形として採用されてきた。

超ガンマ分布は、ガンマ分布よりパラメーターが1個多く複雑となるが、各種水文量確率分布にoverfitともいえるほどよく適合するといわれている。しかし、母数推定がやや煩雑であり、取り扱い上の不便さから実用上適用例は、それほど多くない。(2)式で、 $\gamma=1$ のとき(1)式のガンマ分布となる。また、 $\alpha=1$ 、 $\gamma=2$ のとき正規分布、 $\gamma=-1$ のときピアソンV型となり、かなり広い範囲の確率分布関数の一種の統一的表現となっている。

ポアソン・ガンマ分布の確率密度関数(3)式の $\nu(=1, 2, \dots, \infty)$ は、降水事象の生起回数が単位時間内に1回、2回、……、 ∞ 回であることを示している。(3)式のような考え方は、流量量公式、降水量分布などに適用された例がある。

表-1 各分布式の確率密度関数および尤度方程式

項目 \ 分布	ガンマ分布	超ガンマ分布	ポアソン・ガンマ分布
確率密度関数	$f(x; \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$ (1)	$f(x; \alpha, \beta, \gamma) = \frac{\beta^\alpha \Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha/\gamma)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \gamma^{\alpha/\gamma}$ (2)	$f(x; \alpha, \beta, \lambda) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \frac{\lambda^\nu}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$ (3)
尤度方程式	$\log \beta = [\gamma \alpha / \Gamma(\alpha)] - \sum_{i=1}^n \log x_i / n$ (5) $\alpha / \beta = \sum_{i=1}^n x_i / n$ (6)	$\alpha \log \Gamma - \Psi(\alpha/\gamma) + \log \beta = 0$ (7) $\beta \Gamma \sum_{i=1}^n x_i^\gamma - n \alpha = 0$ (8) $\alpha / \beta = \sum_{i=1}^n x_i / n$ (9)	$\sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{\nu} \sum_{\nu=1}^{\infty} (H \cdot \frac{\partial H}{\partial \alpha}) \right\} = 0$ (10) $\sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{\nu} \sum_{\nu=1}^{\infty} (H \cdot \frac{\partial H}{\partial \beta}) \right\} = 0$ (11) $\sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{\nu} \sum_{\nu=1}^{\infty} (H \cdot \frac{\partial H}{\partial \lambda}) \right\} = 0$ (12)
備 考	α : 形状母数, β : 尺度母数 n : 降水資料数, x : 降水量	α, β, γ : 母数, $\log \Gamma = \sum_{i=1}^n \log x_i / n$ Ψ : ティ・ガンマ関数 n : 降水資料数, x : 降水量	α, β : ガンマ分布における形状母数・尺度母数 λ : 単位時間内の降水事象平均生起回数 ν : 単位時間内の降水事象の生起回数 n : 降水資料数, x : 降水量 $f(x; \alpha, \beta, \lambda) = \sum_{\nu=1}^{\infty} H(x; \alpha, \beta, \lambda)$ とおく

3. 計算例および考察

対象とした降水資料は、大坂の70年間(1901年～1970年)の日降水量資料である。この中に含まれている0.0mm/day降水量は、最尤法による母数推定の際、母数が負値とな、たとえ計算不可能となるので、ここでは、降水量すべてに0.01mm/dayを加えて、その値を日降水量とした。

表-2 各分布式の母数

分布	母数	α	β	λ
ガンマ分布		0.312	0.057	—
ポアソン・ガンマ分布		0.113	0.072	3.386
超ガンマ分布		0.291	0.011	1.420

表-2に、ガンマ分布、ポアソン・ガンマ分布、超ガンマ分布の3月の母数を示す。表-3の右端には、月別に超ガンマ分布の母数が存在したかどうかを示している。超ガンマ分布の尤度関数式(7)～(9)は、やや複雑な式形にみえるが、(8)式の α を β 、 γ の関数として表わし、これを(9)式に代入して β を γ のみの式で表わせば(7)式が γ のみの一変数の関数となるので容易に解くことができる。この方法を採用して解を探索した。母数が求まらない月は、 α 、 γ が負値となり、尤度方程式は満たされているが、 $x > 0$ に対して確率密度関数が負となるため、(3)式が日降水量分布式とは成りえないことを意味する。

図-1には、超ガンマ分布の母数も求まっている3月について、ガンマ分布、ポアソン・ガンマ分布、超ガンマ分布の日降水量分布に対する適合性を、非超過確率において比較した例を示している。このように、超ガンマ分布の母数が推定される月については、超ガンマ分布の適合性が良い。

つぎに、ポアソン・ガンマ分布およびガンマ分布と日降水量分布との χ^2 分布による適合度の検定を行った。結果を表-3に示す。この表によると、1、2、4、12月は、いずれの分布も棄却されている。ここで、4月については、棄却域の境界ギリギリで棄却されているので除外して考えると棄却された月は、いずれも1mm/day未満の降水の出現する確率が50%以上となる。すなわち、非常に小さい降水の生起する確率が高いことを表わしている(表-4参照)。さらに、これらの月は、前述した超ガンマ分布の母数が存在しなかった月と一致している。これらのことより、0.0mm/dayを含む小さい降水の取り扱いについては、今後何らかの工夫が必要である。

表-3より、物理現象と理論の適合性という見地から実際現象にもっとも近いと考えられるポアソン・ガンマ分布が、従来日降水量分布によく用いられるガンマ分布よりは適合度が高いことがわかる。

4. まとめ

(1) 1mm/day未満の日降水量の出現確率が50%以上となる月では、ガンマ分布、ポアソン・ガンマ分布とも χ^2 分布適合度検定で棄却される。また、超ガンマ分布の最尤推定値は存在しない。

(2) 他の月では、超ガンマ分布の適合性が高くと高く、次がポアソン・ガンマ分布、ガンマ分布の順となる。

(参考文献)

1) 鈴木栄一：気象統計学，地人書館

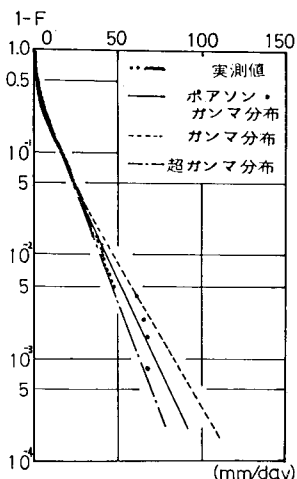


図-1 非超過確率 (3月)

表-3 適合度検定の結果 (有意水準 5%)

○ ---- 適合		X ---- 棄却	
分布			
月	ガンマ分布	ポアソン・ガンマ分布	超ガンマ分布
1	X	X	X
2	X	X	X
3	X	○	○
4	X	X	○
5	○	○	○
6	○	○	○
7	○	○	○
8	○	○	○
9	○	○	○
10	○	○	○
11	X	○	○
12	X	X	X

O--- 母数が求まる X--- 求まらない

表-4 降水事象出現率

降水量	1mm/day未満	5mm/day未満
月		
1	63.4	80.3
2	59.6	77.1
3	45.9	66.9
4	36.0	56.2
5	33.7	56.6
6	31.1	52.6
7	42.5	60.7
8	48.0	69.3
9	39.1	60.5
10	39.3	59.8
11	43.8	66.2
12	56.5	77.1

(%)