

1. はじめに 洪水頻度分布解析において最近話題となっている歪度の Condition of Separation (以後 CS と略記する) につき、一般化ガンマ (GG) 分布と対数ピアソン3型 (LP3) 分布が Wakeby 分布と同様、CS を最小にすることが可能かをモンテカルロ法により比較検討する。

2. Condition of Separation 最小化の必要条件 Matalas³⁾ 達は 1351 地点での年最大洪水資料から重複しない標本数 $N = 10, 20, 30$ について、歪度 S_k を計算し、さらに合衆国を 14 の地域に分割して各地域における各標本数毎の S_k の平均値 $\mu(S_k)$ と標準偏差 $\sigma(S_k)$ を算出した。ついで彼らは、 $N = 10, 20, 30$ につき、ある特定の理論確率分布形に従う 100,000 個の洪水系列を模擬発生させ、歪度 γ の平均値 $\mu(\gamma)$ と標準偏差 $\sigma(\gamma)$ を計算した。その結果、 $\mu(S_k) \approx \mu(\gamma)$, $\sigma(S_k) > \sigma(\gamma)$ の関係を見出し、この隔りを Condition of Separation と呼んでいる。とくに、標本数 N が大なるにつれて、CS は顕著になる。彼らが採用した 7 個の確率分布形のうち、対数正規 (3PLN) 分布が $\sigma(S_k)$ と $\sigma(\gamma)$ の隔りが最も小さく、CS 曲線の上限値を与えている。しかも、この時、同じ母集団歪度に対して 3PLN 分布の理論尖度が最も大である。したがって、CS を小さくするには同一の歪度に対して 3PLN 分布の尖度より大きい尖度をもつ確率分布形を選択することが必要条件と考えられた。3PLN, ピアソン3型, ワイブル分布に共通する性質として、分布母数の 1 つが歪度だけに依存し、しかもこの時、尖度は変動係数に独立に歪度だけの関数となる点があげられる。表-1 の (1) の項にはその一例として、3PLN 分布の特性値が示されているが、上述の性質が容易に理解される (μ_X : 平均値, σ_X : 標準偏差, γ_X : 歪度, λ_{3PLN} : 尖度)。以上の Review により、変動係数が CS を小さくするための要因として十分に考慮されていないことが指摘される。そこで、ここでは尖度が変動係数と歪度の両方に依存している GG 分布と LP3 分布を用いて、CS に及ぼす変動係数の影響を調べる。GG 分布^{4,5)} は 3 母数 a, k, b をもち、密度関数は (4) 式で定義される。この分布の変動係数 β_X , 歪度 γ_X , および尖度 λ_{GG} は (5) 式 - (7) 式で与えられる。積率法による GG 分布の母数推定法では、(5) 式と (6) 式に示されるように、 k, b は β_X と γ_X の両方に依存する。その解法には Newton-Raphson 法を試みた。また、尖度 λ_{GG} は (7) 式に示されるように、 k, b に依存する。したがって、上記の理由により、 λ_{GG} は β_X と γ_X の双方に依存する。図-1 は GG 分布と 3PLN 分布について歪度と尖度の関係を図示したものである。図-1 より、GG 分布においては同一の変動係数 β_X に関して λ_{GG} は歪度が大なるにつれて 3PLN 分布の尖度より大となる。また、同一の歪度に対しては λ_{GG} は β_X が小なるにつれて λ_{3PLN} より大となる。したがって、GG 分布はある母数の組合せ方によっては CS を小さくする要件をかねそなえている。(8) 式は λ_{GG} と λ_{3PLN} の大小関係を規定する条件である。LP3 分布の密度関数は (9) 式で定義され、変動係数

Table 1 Summary of Equations

(1) three-parameter log normal (3PLN) distribution	
$y = \ln(x - a); y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$	(1)
$\mu_X = a + e\phi^{1/2}, \sigma_X = e\{\phi(\phi - 1)\}^{1/2}, \gamma_X = (\phi - 1)^{1/2}(\phi + 2) \dots$	(2)
$\lambda_{3PLN} = \phi^4 + 2\phi^3 + 3\phi^2 - 3, c = \exp(\mu_y), \phi = \exp(\sigma_y^2) \dots$	(3)
(2) generalized gamma (GG) distribution	
$f(x; a, k, b) = b x^{bk-1} \exp[-(x/a)^b] / [a^{bk} \Gamma(k)] \quad x \geq 0 \dots$	(4)
$\beta_X = \frac{[\Gamma(k+\frac{1}{b})\Gamma(k) - \Gamma^2(k+\frac{1}{b})]^{1/2}}{\Gamma(k+\frac{1}{b})} \dots$	(5)
$\gamma_X = \frac{\Gamma(k+\frac{3}{b})\Gamma^2(k) - 3\Gamma(k+\frac{2}{b})\Gamma(k+\frac{1}{b})\Gamma(k) + 2\Gamma^3(k+\frac{1}{b})}{[\Gamma(k+\frac{2}{b})\Gamma(k) - \Gamma^2(k+\frac{1}{b})]^{3/2}} \dots$	(6)
$\lambda_{GG} = \frac{\Gamma(k+\frac{4}{b})\Gamma^3(k) - 4\Gamma(k+\frac{3}{b})\Gamma(k+\frac{2}{b})\Gamma^2(k) + 6\Gamma(k+\frac{2}{b})\Gamma^2(k+\frac{1}{b})\Gamma(k) - 3\Gamma^4(k+\frac{1}{b})}{[\Gamma(k+\frac{2}{b})\Gamma(k) - \Gamma^2(k+\frac{1}{b})]^2} \dots$	(7)
If $\gamma_X \leq \beta_X^3 + 3\beta_X$, then $b \geq 0$ and $\lambda_{GG} \leq \lambda_{3PLN} \dots$	
(3) log Pearson type 3 (LP3) distribution	
$f(x; a, b, c) = \{(\ln x - c)/a\}^{b-1} \exp[-(\ln x - c)/a] / [a \Gamma(b)x] \dots$	(9)
$\beta_X = \frac{[(1-2a)^{-b} - (1-a)^{-2b}]^{1/2}}{(1-a)^{-b}} \dots$	(10)
$\gamma_X = \frac{(1-3a)^{-b} - 3(1-a)^{-b}(1-2a)^{-b} + 2(1-a)^{-3b}}{[(1-2a)^{-b} - (1-a)^{-2b}]^{3/2}} \dots$	(11)
$\lambda_{LP3} = \frac{(1-4a)^{-b} - 4(1-a)^{-b}(1-3a)^{-b} + 6(1-a)^{-2b}(1-2a)^{-b} - 3(1-a)^{-4b}}{[(1-2a)^{-b} - (1-a)^{-2b}]^2} \dots$	(12)
If $\gamma_X < \beta_X^3 + 3\beta_X$, then $a < 0, 0 \leq x \leq \exp(c)$, and $\lambda_{LP3} < \lambda_{3PLN} \dots$	
If $\gamma_X > \beta_X^3 + 3\beta_X$, then $a > 0, \exp(c) \leq x \leq \infty$, and $\lambda_{LP3} > \lambda_{3PLN} \dots$	
(4) Wakeby distribution	
$x = m + a[1 - (1-F)^b] - c[1 - (1-F)^d] \dots$	(15)
$F = F(x) = \Pr(X \leq x); x > m; m, a, b, c, \text{ and } d = \text{parameters} \dots$	

β_x , 歪度 γ_x , および尖度 λ_{LP3} は (10) 式 - (12) 式で与えられる。母数推定値 a, b は (10) 式と (11) 式に示されるように、 β_x と γ_x の両方に依存する。ここでは、その解法に Newton-Raphson 法を試みた。⁶⁾ LP3 分布の尖度 λ_{LP3} は (12) 式に示されるように、母数 a, b に依存する。したがって、GG 分布と同様、 λ_{LP3} は β_x と γ_x の双方に依存する。LP3 分布の形状特性、および λ_{LP3} と λ_{3PLN} の大小関係は (13) 式と (14) 式の条件に規定される。すなわち、LP3 分布もある母数の組合せ方によっては CS を最小にする必要条件を満たす。

3. 適用例 現在、CS を最小にする確率分布形として提示されているものに (15) 式に示される Wakeby 分布がある。この分布形は 5 母数を持ち、その推定法には最小自乗法が適用されている。Landwehr 達は少なくとも Region 1 に対しては Wakeby 分布が CS を最小にすることが可能だとしている。Region 1 における標本数 $N=10$ について計算された変動係数 C_v と歪度 S_k の平均値 μ と標準偏差 σ が表-2 の最後列に示される。Landwehr 達が用いた Wakeby 分布の母数とその時の統計量およびモンテカルロ法による結果が表-2 の「Wakeby」の列に示される。GG 分布と LP3 分布が少なくとも Wakeby 分布と同様、Region 1 の CS を小さくするかどうかをモンテカルロ法により調べた。その結果が表-2 に示される。指定母集団統計量は $\gamma_x > \beta_x^3 + 3\beta_x$ の関係にあり、GG 分布と LP3 分布の尖度は 3PLN 分布の尖度より大となる。ちなみに、3PLN 分布では $\gamma_x = 4$

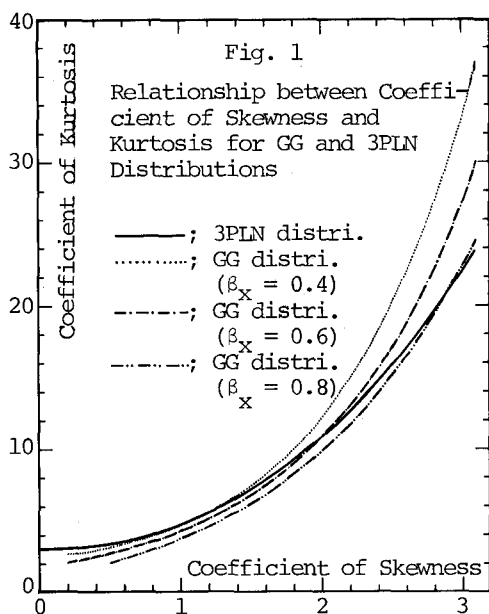


Table 2 Examination of Separation Effects

Type of Distribution	Generalized Gamma		Log Pearson Type 3	Wakeby*	Region 1
Population Statistics (Mean, Coefficient of Variation, Skew, and Kurtosis)	μ_x	1	1	1	1000
	β_x	0.66	0.60	0.66	0.66
	γ_x	3.95	4.00	3.95	3.95
	λ_x	63.57	79.68	52.43	51.94
Parameters	a	7.236	2.937	0.137	$m = 0, a = 1$
	k	6.047	4.187	14.259	$b = 16, c = 5$
	b	-0.805	-1.088	-2.095	$d = 0.19$
Sample Size	10	10	10	10	
Generated Sequences	50,000	10,000	50,000	10,000	
Mean and Standard Deviation of Estimates	$\mu(C_v)$	0.55	0.51	0.54	0.55
	$\sigma(C_v)$	0.34	0.34	0.32	0.20
	$\mu(S_k)$	0.95	0.94	0.97	0.95
	$\sigma(S_k)$	0.70	0.71	0.69	0.75

* Result taken from Landwehr et al. (1978)

の時、 $\lambda_{3PLN} = 41$ である。したがって、表-2 の尖度 λ_x に示されるように、3 分布形ともに CS の必要条件を満たしている。表-2 の結果により、(1) 3 分布形とも $\mu(C_v)$ と $\mu(S_k)$ に関しては、Region 1 の標本特性値を再現する。(2) GG, LP3 分布とも $\sigma(C_v)$ は Wakeby 分布のそれより大きく、逆に $\sigma(S_k)$ は幾分 Wakeby のそれより小さい。したがって、 $\sigma(C_v)$ と $\sigma(S_k)$ の間には tradeoff が存在し、CS に及ぼす変動係数の要因が考慮されねばならない。(3) GG 分布では $\beta_x = 0.6$, $\gamma_x = 4$ の結果の方が Region 1 の CS をよく説明している。その理由として考えられるのは、GG 分布 (LP3 分布も同様) では、図-1 に示されるように、同一の歪度に対して変動係数が小なる程理論尖度が大となる点である。このことは表-2 の GG 分布の 2 ケースの尖度を比べてもわかる。(4) 定量的結論を得るにはさらに多くの数値実験を必要とするが、GG, LP3 分布とも Wakeby 同様 CS 最小化可能である。

参考文献

- (1) Houghton, J.C., Birth of a parent: The Wakeby distribution for modeling flood flows, WRR, 14(6), 1105-1109, 1978.
- (2) Landwehr, J.M. et al., Some comparisons of flood statistics in real and log space, WRR, 14(5), 902-920, 1978.
- (3) Matalas, N.C. et al., Regional skew in search of a parent, WRR, 11(6), 815-826, 1975.
- (4) Stacy, E.W. and Mihram, G.A., Parameter estimation for a generalized gamma distribution, Technometrics, 7(3), 1965.
- (5) 星, 豊汎: 一般化ガンマ分布の水文統計への適用, 土木学会北海道支部報告集, 第35号, 180-185, 1979.
- (6) 星, 山岡: 対数ピアソン3型分布の積率法, 土木学会第34回年次学術講演会講演概要集, 11, 7-8, 1979.