II-67　Bowenの離岸流理論についての検討

電力中央研究所　正員　○丸山康樹
同　上　　　正員　鹿島遼一

1．はじめに

海浜流については、様々な角度から現在でも継続的に発表されており（例えば Bettess, Fleming（1978））、理論面からもまた計算面からも問題が残されている。筆者らは先に、Liu and Mei（1974）の流れの計算法を検討したが、波高の高低分布と離岸流の発生位置の関係が Bowen（1969）の理論と逆の関係になることに気付いた（丸山・鹿島 1978，図-7参照）。その原因を検討し、理由が明らかになったので以下に報告する。

2．Bowen（1969）の離岸流理論

基本方程式は次式で与えられる。

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-g\frac{\partial\bar\eta}{\partial x}+R_x+\tau_x \quad \text{----(1)}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-g\frac{\partial\bar\eta}{\partial y}+R_y+\tau_y \quad \text{----(2)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\{u(\bar\eta+h)\}+\frac{\partial}{\partial y}\{v(\bar\eta+h)\}=0 \quad \text{----(3)}$$

x；岸沖方向座標，y；汀線方向座標，$\bar\eta$；平均水位
h；水深，C；摩擦係数，S_{xx}, S_{xy}, S_{yy}；radiation stress

摩擦項：$R_x=-Cu/(\bar\eta+h)$，$R_y=-Cv/(\bar\eta+h)$
強制外力項：

$$\left.\begin{array}{ll} \text{砕波帯内} & \left\{\begin{array}{l}\tau_x=-\dfrac{1}{\rho(\bar\eta+h)}\left(\dfrac{\partial S_{xx}}{\partial x}+\dfrac{\partial S_{xy}}{\partial y}\right)\\[2mm] \tau_y=-\dfrac{1}{\rho(\bar\eta+h)}\left(\dfrac{\partial S_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial S_{yy}}{\partial y}\right)\end{array}\right. \\[8mm] \text{砕波帯外} & \tau_x=\tau_y=0 \end{array}\right\} \text{----(4)}$$

流れ関数ψの導入により、連続条件式，(3)式は満足される。外力である radiation stress が既知であれば、未知数はψと$\bar\eta$の2つとなり、方程式数も(1),(2)式の2つが残るので原理上，それぞれの未知数を解くことができるはずである。ところが、Bowen では平均水位$\bar\eta$を次式のように仮定し、未知数をψだけにしている。

$$d=\bar\eta+h=m\bar x(1+\varepsilon\cos\lambda y) \quad \text{----(5)}$$ 　$\bar x$；set-up量だけ平行移動した座標

この仮定は未知数と方程式数の数学的な整合性に矛盾し、1節の理由の本質となるものである。具体的な検討は次節で行い、Bowen の理論を引き続き概説する。平均水位を含んだ水深d（(5)式）と波高の間には次の関係があるものとする。

$$H=\gamma d \quad \text{----(6)}$$ 　γ；水深波高比で定数

この関係から radiation stress を計算し，移流項を省略したうえで、(1),(2)式右辺第1項を交互微分により消去すると，ψについて最終的に次式が得られる。

$$\frac{1}{d^2}(\psi_{\bar x\bar x}+\psi_{yy})-\frac{2m}{d^3}\psi_{\bar x}=\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{B}{C}\sin\lambda y & (\text{砕波帯内})\\ 0 & (\text{砕波帯外})\end{array}\right. \quad \text{----(7)}$$

$$B=-\frac{g\gamma^2 m\varepsilon\lambda}{4} \quad \text{----(8)}$$

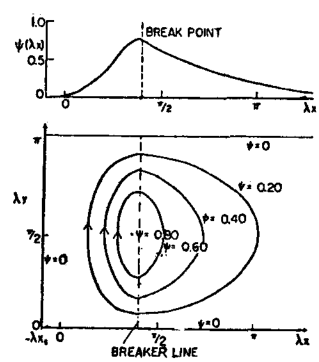

図-1　Bowen（1969）の解析解

汀線（$\bar x=0$）および十分沖（$\bar x=\bar x_2$）で$\psi=0$，(5)式の周期性を考慮した側方の境界条件，$\psi=0$（$y=0, \pi/\lambda$）のもとで、(7)式は解析的に解くことができる。Bowen の論文中の結果を図-1に引用するが、循環流の沖に流れる位置は$y=\pi/\lambda$で，(5),(6)式からこの位置は平均水位の小さい部分，即ち波高の小さい部分に対応する。

3．Liu and Mei（1974）の数値計算法

Liu and Mei の原論文では基本方程式が(1),(2)式と多少異なるが、その計算アルゴリズムを Bowen 理論に適用することで問題点が顕在化する。Liu and Mei は Noda（1974）らとは異なり，楕円型微分方程式であるψについての方程式をポアソン型に変形している。この方法で(7)式を変形すると次式が得られる。

$$\psi_{xx}+\psi_{yy}=\begin{cases}-\dfrac{8}{C\delta^2}Bd^2\sin\lambda y & (\text{砕波帯内})\\ 0 & (\text{砕波帯外})\end{cases}\quad ----(9)$$

ポアソン型方程式の場合には、右辺の符号変化が重要で、 $d^2=\{m\bar{x}(1+\varepsilon\cos\lambda y)\}^2\doteqdot m^2\bar{x}^2$ ---- (10)
と近似しても解の定性的性質にはほとんど影響しない。Bowenと同じ境界条件を用い、砕波点 ($\bar{x}=\bar{x}_1$) で ψ および $\psi_{\bar{x}}$ の連続性を考慮すると(9)式は解析的に解くことができる。

$$\left.\begin{aligned}\psi&=-\frac{A}{\lambda^2}\left(\bar{x}^2+\frac{2}{\lambda^2}\right)\sin\lambda y+\frac{A}{2\lambda^2}\left\{e^{\lambda\bar{x}_1}\left(\bar{x}_1^2-\frac{2\bar{x}_1}{\lambda}+\frac{2}{\lambda^2}\right)+\frac{e^{\lambda\bar{x}_2}}{\sinh\lambda\bar{x}_2}\cdot f\right\}e^{-\lambda\bar{x}}\sin\lambda y\\&\quad+\frac{A}{2\lambda^2}\left\{e^{-\lambda\bar{x}_1}\left(\bar{x}_1^2+\frac{2\bar{x}_1}{\lambda}+\frac{2}{\lambda^2}\right)-\frac{e^{\lambda\bar{x}_2}}{\sinh\lambda\bar{x}_2}\cdot f\right\}e^{\lambda\bar{x}}\sin\lambda y\quad(\text{砕波帯内})\\ \psi&=-\frac{A\cdot f}{\lambda^2\sinh\lambda\bar{x}_2}\sinh\lambda(\bar{x}-\bar{x}_2)\sin\lambda y\quad(\text{砕波帯外})\end{aligned}\right\}---(11)$$

ただし、 $A=\dfrac{2gm^3\varepsilon\lambda}{C}\,(>0)$, $f=\dfrac{2}{\lambda^2}-\left(\bar{x}_1^2+\dfrac{2}{\lambda^2}\right)\cosh\lambda\bar{x}_1+\dfrac{2\bar{x}_1}{\lambda}\sinh\lambda\bar{x}_1$ ----(12)

図-2は図-1と同様な条件で、(11)式を計算し、作図した結果である。ψ の符号が負で、図-1の結果と異なる。ψ の正負は循環流の回転方向を決め、この解はBowenと逆の流れを与えることになる。また、(10)式の近似の妥当性を検討するために、d^2 を定数Dとしたときの解析解 ψ' を求め、図-2に比較のために示した（ただし、$A=2gm\varepsilon\lambda D/C$ ）。値はほとんど変化せず、d^2 の近似の違いによる影響は少ないと言える。以上が2節で述べた原因にもとづく、Bowen理論の不完全さの具体的な指摘である。

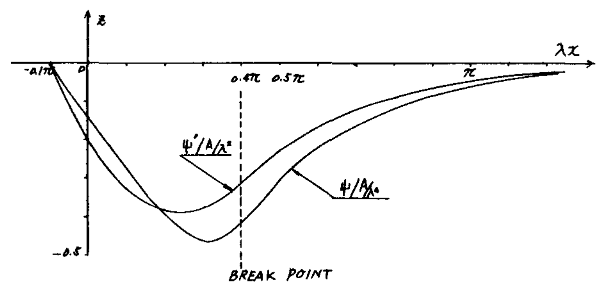

図-2 (9)式の解析解の岸沖方向分布（$\sin\lambda y$ の係数部）

4. 結論

(7)式から(9)式の変形には、基本方程式(1),(2)式を用いているだけで、不合理な点はない。Bowenの解が基本方程式(1),(2)を満たすものであれば、(7),(9)式の解は一致するはずである。しかし、3節で指摘したように(3)式の解には回転方向が異なると言う重大な差が生ずる。即ち、Bowenの解は基本方程式を満足しない特殊な解である。

(1),(2)式を d および ψ について解くと、それぞれ次の方程式が得られる。

$$\nabla^2 d=\begin{cases}\nabla^2 h+\dfrac{2}{d}(d_{\bar{x}}h_{\bar{x}}+d_y h_y-d_{\bar{x}}^2-d_y^2)-\dfrac{1}{\rho g d^2}\left\{d_{\bar{x}}\dfrac{\partial S_{xx}}{\partial\bar{x}}+d_y\dfrac{\partial S_{yy}}{\partial y}+d\left(\dfrac{\partial^2 S_{xx}}{\partial\bar{x}^2}+\dfrac{\partial^2 S_{yy}}{\partial y^2}\right)\right\} & (\text{砕波帯内})\\ \nabla^2 h+\dfrac{2}{d}(d_{\bar{x}}h_{\bar{x}}+d_y h_y-d_{\bar{x}}^2-d_y^2) & (\text{砕波帯外})\end{cases}---(13)$$

$$\nabla^2\psi=\begin{cases}\dfrac{2gd}{C}(d_{\bar{x}}h_y-d_y h_{\bar{x}})+\dfrac{1}{\rho C}\left\{d\dfrac{\partial^2}{\partial\bar{x}\partial y}(S_{xx}-S_{yy})+d_y\dfrac{\partial S_{xx}}{\partial\bar{x}}-d_{\bar{x}}\dfrac{\partial S_{yy}}{\partial y}\right\} & (\text{砕波帯内})\\ \dfrac{2gd}{C}(d_{\bar{x}}h_y-d_y h_{\bar{x}}) & (\text{砕波帯外})\end{cases}---(14)$$

$d\,(=\bar{\eta}+h)$ には h の勾配と波による強制外力であるradiation stressが作用し、流れが影響しないので(13)式を ψ とは独立に解くことができる。一方、ψ には d、即ち平均水位とradiation stressが同オーダで作用する。Bowenは(13)式を解かずに、(5),(6)式で平均水位分布を与えたため不合理であると要約できる。現在行なわれているNoda (1974)流の数値計算は、なんらかの形で平均水位を仮定している例が多い。その場合には、上記の現象が同様に表われ、方程式を楕円型からポアソン型に変形しただけで結果が異なってしまう危険性がある。今後は(13)式のより合理的な定式化が必要である。

参考文献； Bowen (1969) : Rip currents, 1. Theoretical investigation, J.G.R., Vol.74, No.23, Liu and Mei (1974) : Effects of a breakwater ～, Tech. Rep. 192, MIT, 丸山・鹿島 (1978) : 防波堤周囲～, 第25回海岸工学講演集.