II-16　有限振幅波による円柱に働く波力

大阪市立大学工学部　正員　倉田克彦

1. まえがき

円柱に働く波力に関する理論的研究としては，MacCamy & Fuchs による微小振幅波の回折問題としての取扱いがその端緒であって，以後山口・土屋によるStokes 波の才2次近似解に対する摂動解が発表され，さらにはStokes の才5次近似解に対して，各次数の成分波に対する回折問題に置き換え，それらの解を線型的に重ね合わせた擬似非線型解とでも言うべき解がChakrabarti によって得られている。

著者は，有限振幅波の次数を高め且つ演算の簡単化を図るために有限要素法を用いた数値解析によって直立円柱に働く波力を求めることを試みてきた。これ迄の方法では不十分な箇所があったため，今回それを改め入射波として次数を高めたStokes 波の才3次近似解を用いた場合の円柱に働く波力を求めた。

2. 解析方法

汎函数Πはこれ迄と同様に次式で与える。

$$\Pi = \iiint_{\Omega} \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right\} dV + \iint_{\Gamma_S}\left\{\frac{g}{2}\eta^2 + \frac{\partial\phi}{\partial t}\eta - \phi\frac{\partial\eta}{\partial t}\right\} dS + \iint_{\Gamma_R}\phi f_R\, dS \tag{1}$$

ここで領域Ωは水底面Γ_B，直立円柱側面Γ_C，水面Γ_Sおよび仮想無限遠境界面Γ_Rによって囲まれており，その内部では水は非粘性・非圧縮性であって非回転運動している。したがって速度ポテンシャルϕの存在が許される。ηは水面変動であって，$f_R = [\partial\phi/\partial n]_{\Gamma_R}$；（$n$：外向きに立てた法線）の値は Sommerfeld の放射条件により定められる。ϕおよびηのtに関する偏微分を

$$\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}\right]_{t=t_1} = \frac{[\phi]_{t=t_1} - [\phi]_{t=t_1-\Delta t}}{\Delta t}, \quad \left[\frac{\partial\eta}{\partial t}\right]_{t=t_1} = \frac{[\eta]_{t=t_1} - [\eta]_{t=t_1-\Delta t}}{\Delta t} \tag{2}$$

のように置けば，式(1) の汎函数は次のような形に書ける。

$$\begin{aligned}\Pi = {} & [\phi][\mathbb{A}]_{\Omega+\Gamma_R}[\phi]^T - [\phi][\mathbb{B}]_{\Gamma_S}[\eta]^T + [\eta][\mathbb{B}]_{\Gamma_S}[\phi]^T + [\eta][\mathbb{C}]_{\Gamma_S}[\eta]^T \\ & - [\phi]\{f_i\}_{\Gamma_R} + [\phi][\mathbb{B}]_{\Gamma_S}[\eta_{t=t_1-\Delta t}]^T - [\eta][\mathbb{B}]_{\Gamma_S}[\phi_{t=t_1-\Delta t}]^T \\ & - [\phi][\mathbb{D}]_{\Gamma_R}[\phi_{t=t_1-\Delta t}]^T\end{aligned} \tag{3}$$

$[\eta_{t=t_1-\Delta t}]^T$, $[\phi_{t=t_1-\Delta t}]^T$, $\{f_i\}_{\Gamma_R}$ は既知の量として取扱えるので，式(3) で表わされるΠの才1変分$\delta\Pi = 0$とおけば

$$\{\Phi\} = \begin{Bmatrix} [\phi]^T \\ [\eta]^T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbb{A}] & -[\mathbb{B}] \\ [\mathbb{B}] & [\mathbb{C}] \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \{f_i\} + [\mathbb{D}][\phi_{t=t_1-\Delta t}]^T - [\mathbb{B}][\eta_{t=t_1-\Delta t}]^T \\ [\mathbb{B}][\phi_{t=t_1-\Delta t}] \end{Bmatrix}$$

$$= [\mathbb{E}]^{-1}\{p\} \tag{4}$$

によって$[\phi]^T$, $[\eta]^T$が求まる．係数行列$[\mathbb{E}]$は水面変動ηによって異なるので，式(4)は両辺にηを含むことになり，繰返し計算等の適当な方法によってηがある値に収束するようにしなければならない。時刻tによっても$[\mathbb{E}]$は異なってくるため，繰返し計算の途中あるいは各時刻毎に毎回$[\mathbb{E}]$あるいはその逆行列$[\mathbb{E}]^{-1}$を計算しなければならないが，このようにすると例え大容量高速度の電子計算機を用いたとしても計算時間が長くかかり得策ではない。したがってここでは次のような近似をおこなうことにする。

まず，微小振幅波の場合と同様に$\eta=0$とおいた$-h \leqq z \leqq 0$の範囲で$[\mathbb{E}]_0$を求める。次にこの$[\mathbb{E}]_0$を用いて式(4)から$\{\eta\}$を求める。この$\{\eta\}$を用いた時の$[\mathbb{E}]_\eta$を次式のように書くと

$$[\mathbb{E}]_\eta = [\mathbb{E}]_0 - [\delta] \tag{5}$$

$$[\mathbb{E}]_\eta^{-1} = \left([\mathbb{I}] + ([\mathbb{E}]_0^{-1}[\delta]) + ([\mathbb{E}]_0^{-1}[\delta])^2 + \text{-----}\right)[\mathbb{E}]_0^{-1} \quad ([\mathbb{I}]：単位行列) \tag{6}$$

のように表わされるので，右辺の第2項までをとれば

$$\{\Phi\} = \begin{Bmatrix} [\phi]^T \\ [\eta]^T \end{Bmatrix} = [\mathbb{E}]_\eta^{-1}\{p\} = \left[[\mathbb{E}]_0^{-1} + ([\mathbb{E}]_0^{-1}[\delta])[\mathbb{E}]_0^{-1}\right]\{p\}$$

$$= [\mathbb{E}]_0^{-1}\{p\} + [\mathbb{E}]_0^{-1}[\delta][\mathbb{E}]_0^{-1}\{p\} = \{\Phi_0\} + [\mathbb{E}]_0^{-1}[\delta]\{\Phi_0\}$$

$$= \{\Phi_0\} + [\mathbb{E}]_0^{-1}\{\psi\} = \{\Phi_0\} + \{\Delta\Phi\} \tag{7}$$

のようにして求める解$\{\Phi\}$が得られる。この方法であれば逆行列$[\mathbb{E}]_0^{-1}$を一度求めておくだけで，後は$[\delta]$を求めればよく，比較的短時間で計算を終ることができる。