II-14　　一本の長い海岸線にかこまれた海岸に起こる静振について

舞鶴工業高等専門学校　正員○前野　賀彦
明石工業高等専門学校　正員　西村　益夫

1. まえがき　傾斜した海浜に深海波としての沖波が進入して来る時、水深も幅も変化するような場合に対する式として、Greenの式が良く知られている。また、原点から水深も幅も直線的に変化する場合については、Lamb によって示されている。しかしながら、実際の海岸において良く見られるように、海岸壁において、ある水深を有し、それより沖に向かうにしたがい水深も幅も直線的に増加していく場合、あるいは、海岸線で、ある水深を有し、それより沖に向かうにつれて海の深さおよび幅が直線的もしくは曲線的に変化する場合などでは、沖波はどのように変化するのかという事については、既に西村が発表している。今回は、幅が無限であるような大洋の間に、海岸を絶壁と考え海岸壁においてある水深を有し、それより沖に向かうにつれて、水深が放物線的に次第に深くなる場合、すなわち唯一本の長い海岸線にかこまれた海で、海岸附近が浅い棚海のような場合について、どのような振動を起こすのか計算を行い報告するものとする。

2. 理論的考察　まえがきでも述べたように、海岸壁においてある水深 h_0 を有し、沖に向かうに従って、水深が放物線的に増加する場合、水深 h は、海岸壁を原点とし、沖へ向かって $+x$ とすれば、(1)式で表わすことができる。ここで、a は常数である。

$$h = h_0\left(1 + x^2/a^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \cdots\cdots (1)$$

また、平均海面上の海面の上昇を ζ とすると、ζ の微分方程式は、g を重力加速度、t を時間として、(2)式で表わされる。

$$\partial^2\zeta/\partial t^2 = g\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) \quad \cdots\cdots (2)$$

ここで、$\zeta = K\left(\frac{x}{a}\right)\cos\sigma t$ として(1)式を(2)式に代入し、$\frac{x}{a} = r$、$\theta = 2\sigma^2a^2/gh_0$、$K'\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{dk}{dr}$、$K''\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{d^2k}{dr^2}$ とすると、(3)式を得る。

$$\frac{d}{dr}\left[(1+r^2)^{\frac{1}{2}}\frac{dk}{dr}\right] + \frac{\theta}{2}k = 0 \quad \cdots\cdots (3)$$

さらに、$r = \sinh 2\mu$ とおくと(3)式は(4)式となる。

$$\frac{d^2k}{d\mu^2} + 2\theta\cosh 2\mu\cdot k = 0 \quad \cdots\cdots (4)$$

この(4)式で表わされる方程式は、(5)式で表わされる変形マシュ関数において $\alpha = 0$ の場合である。(5)式の変

$$\frac{d^2k}{d\mu^2} - (\alpha - 2\theta\cos 2\mu)k = 0 \quad \cdots\cdots (5)$$

形マシュ関数は、(6)式で表わされるマシュ関数に、$\mu = i\mu$ を代入して得られるものである。(5)式の変形マシ

$$\frac{d^2k}{d\mu^2} + (\alpha - 2\theta\cos 2\mu)k = 0 \quad \cdots\cdots (6)$$

ュ関数は、θ が与えられる時、α がある特定の値をとる時に限り(5)式の解が変形マシュ関数となる。この α は固有値であり、θ が与えられれば、各変形マシュ関数について求まる。今求めようとする(4)式の解は、θ の値に対して、$\alpha = 0$ となるようにする必要がある。また、マシュ関数はその係数に周期関数が入っているので、その解も周期関数を要求される。そこで、K および α を次のように表わすことにする。

$$K = \cosh m\mu + \theta C_1(\mu) + \theta^2 C_2(\mu) + \cdots + \theta^n C_n(\mu) \quad \cdots (7)$$

$$\text{or } K = \sinh m\mu + \theta S_1(\mu) + \theta^2 S_2(\mu) + \cdots + \theta^n S_n(\mu) \quad \cdots (8)$$

$$\alpha = m^2 + \alpha_1\theta + \alpha_2\theta^2 + \cdots + \alpha_n\theta^n \quad \cdots (9)$$

$$\text{or } \alpha = m^2 + \beta_1\theta + \beta_2\theta^2 + \cdots + \beta_n\theta^n \quad \cdots (10)$$

(7),(8)式中の C_n, S_n は未知の関数である。(7),(9)式もしくは、(8),(10)式を(6)式に代入して解をもとめる場合、$Ce_m(\mu,\theta)$、$Se_m(\mu,\theta)$ という記号で解を表わす。(6)式のマシュ微分方程式の周期解は、次の四種に分解される。

$$Ce_{2n}(\mu,\theta) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2n)}\cos 2r\mu \quad \cdots (11)$$

$$Ce_{2n+1}(\mu,\theta) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}^{(2n+1)}\cos(2r+1)\mu \quad \cdots (12)$$

$$Se_{2n+1}(\mu,\theta) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}^{(2n+1)}\sin(2r+1)\mu \quad \cdots (13)$$

$$Se_{2n+2}(\mu,\theta) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+2}^{(2n+2)}\sin(2r+2)\mu \quad \cdots (14)$$

したがって、変形マシュ関数は、(11)〜(14)式に $\mu = i\mu$ を代入して(15)〜(18)式として得られる。

$$Ce_{2n}(\mu,\theta) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2n)}\cosh 2r\mu \quad \cdots (15)$$

$$Ce_{2n+1}(\mu,\theta) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}^{(2n+1)}\cosh(2r+1)\mu \quad \cdots (16)$$

$$Se_{2n+1}(\mu,\theta) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}^{(2n+1)}\sinh(2r+1)\mu \quad \cdots (17)$$

$$Se_{2n+2}(\mu,\theta) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+2}^{(2n+2)}\sinh(2r+2)\mu \quad \cdots (18)$$

(12)式を(6)式に代入して、$\cos(2r+1)\mu$ の各項の係数を 0 とおくと、次式の関係が得られる。

$$\theta A_{2r-1} + \left\{(2r+1)^2 - \alpha\right\}A_{2r+1} + \theta A_{2r+3} = 0 \quad \cdots (19)$$

今、$A_{2r+1}/A_{2r-1} = K_{2r+1}$ とするとき、(20)式の関係が

得られ、マシュ関数をフーリエ展開式に展開して、$\cos(2r+1)\mu$ の係数を0とおくと、(19)式のようになるが、変形マシュ関数は、ベッセル関数の級数で展開することができることが、解っている。

$$\theta K_{2r+1} = \theta^2 / \{\alpha-(2r+1)^2-\theta K_{2r+3}\} \quad \cdots(20)$$

そこで、$\sqrt{4\theta}\cosh\mu = x$ とおくとき(2)式は(21)式となる。

$$(x^2-4\theta)\frac{d^2k}{dx^2} + x\frac{dk}{dx} - (\alpha - x^2+2\theta)K=0 \quad \cdots(21)$$

さらに、$K=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r C_{2r+1}J_{2r+1}(x)$ とおき、(21)式に代入して、$J_{2r+1}(x)$ の係数を求めてみると(22)式を得る。

$$\{(2r+1)^2-\alpha\}C_{2r+1}+\theta C_{2r-1}+\theta C_{2r+3}=0 \quad \cdots(22)$$

すなわち、変形マシュ関数をベッセル関数の級数で展開した場合の係数関係は、(19)式と同一である。したがって、変形マシュ関数の係数のかわりに、マシュ関数の係数を用いても良いことがわかる。

さて今の場合、(4)式を解くのであるが、(4)式は(5)式の変形マシュ関数において、$\alpha=0$ の場合である。すなわち、$\alpha=0$ となるようなθの最小値を求めれば良いのだが、(20)式よりθを求めるのは、連分数の解を求めることになるので複雑である。そこで、図−1に示すαとθとの関係から、$\alpha=0$の時のθの値を求めることにした。その方法とは、(7)式、(9)式を(6)式に代入して、$C_n(\mu)$の各項について、周期的関数となるように、α_nの値を求め、逐次$C_n(\mu)$の値を求めるものである。

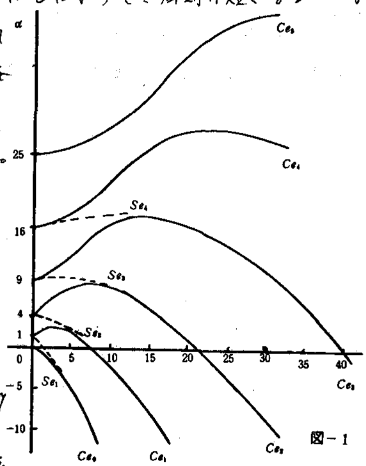
以上のことから、$Ce_0(\mu,\theta)$, $Ce_1(\mu,\theta)$, $Ce_2(\mu,\theta)$, $Ce_3(\mu,\theta)$, $Ce_4(\mu,\theta)$, $Se_1(\mu,\theta)$, $Se_2(\mu,\theta)$, $Se_3(\mu,\theta)$, $Se_4(\mu,\theta)$ に対しての関係は、図−1のようになる。また、$m \geqq 3$ においては、$\alpha=0$ となるθの値は、$\theta=0.86(2m+1)^2$ と言われている。また、$T=2\pi/\sigma$, $\theta=2\sigma^2a^2/gh_0$ であるから、周期Tは(23)式となる。

$$T=2\pi a \Big/ \sqrt{\frac{\theta}{2}\cdot gh_0} \quad \cdots(23)$$

(23)式より、Tはθの最小の時最大となることがわかる。しかし、$\theta=0$ の時には、Tは無限大となり、このような運動は起こり得ない。したがって、$\alpha=0$ になるようなθの最小値($\theta=0$)を与えるCe_0に比例する振動は起こり得ないので、最緩振動は、Se_1に比例する振動である。ところが、今考えているのは、水深が一つの方向にのみ放物線的に深くなる絶壁の海岸の場合で、そこでは、直角の方向には水の運動がない場合で、縦軸に関して偶関数を考えればよい。また、海底に一つの隆起のあるような海堆の場合には、偶関数だけとらない。すなわち今考えているような場合には、Ce_1, Ce_2, Ce_3, Ce_4 なるマシュ関数を、後者の場合には、Se_1, Ce_1 なるようなマシュ関数を用いればよい。周期は(23)式により求めれば良いが、振幅は、(3)式において、$-\frac{\theta}{2}K=\frac{dz}{dr}$ とおいて、(24)式をルンゲ・クッタの方法で解けばよい。

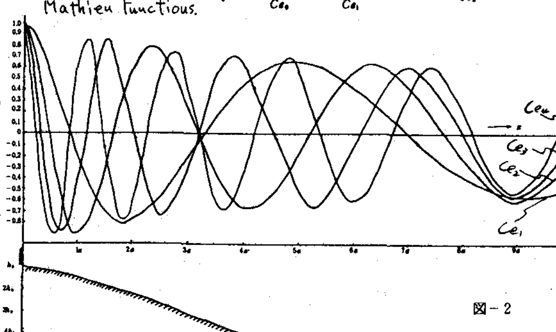
$$\begin{cases}\dfrac{dk}{dr}=z/(1+r^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \dfrac{dz}{dr}=-\dfrac{\theta}{2}K \\ r=0, \quad K=1, \quad z=0\end{cases} \quad \cdots(24)$$

8. 数値計算結果と考察　今回のようなただ一本の海岸線にかこまれた海においても、海岸附近が浅いいわゆる棚海の場合の静振の最緩振動(第一振動)、第二振動、第三振動、第四振動の周期の比は、3.245：1.925：1.369：1.064 であり、振動周期が小さくなっている。また、深さh_0、長さlの矩形湖における静振の周期は、$T=2l/\sqrt{gh_0}$ であり、開口矩形湾における静振の周期は、$T=4l/\sqrt{gh_0}$ であるから、海棚の場合の第一振動の周期は、長さ1.620、深さh_0なる矩形湖水の静振の周期と等しくなる。また、振幅については、図−2に示した。図−2によると、第一、第二、第三、第四振動となるにしたがって、周期が短くなることが認められ、$x=9a$ 附近で波形の谷が一緒になることも認められる。



図−1

《参考文献》
1). 日高孝次：数値積分法 棚海の静振
2) 鬼頭史城：微分方程式解説
3) N. W. Mclachlan：Theory and Application of Mathieu Functions.



図−2