I-343 動的拘束条件を考慮した構造物の最適設計

国士舘大学 工学部 正 ○菊田征勇
東京電機大学 理工学部 正 松井邦人
東洋大学 工学部 正 新延泰生

1. はじめに

種々の構造物は，静荷重だけでなく，走行荷重，衝撃荷重，地震力等の動荷重も受けている。ここでは，そのような時間の関数で表わされる外力を受ける構造物の最適化の一手法を提案する。

2. 動的拘束条件を有する最適化問題

一般に，動的状態にある構造物の最適化は次のように示される。

目的関数 $\phi_0 = g_0(b) + \int_0^\tau h_0(z,b)\,dt$ (1)

運動方程式 $M(b)\ddot{z} + C(b)\dot{z} + K(b)z = Q(b,t)$ (2)

$z(0) = \alpha_1$ (3), $\dot{z}(0) = \alpha_2$ (4)

拘束条件 $\phi_i = g_i(b) + \int_0^\tau h_i(z,b)\,dt = 0$ (5)

$i = 1, 2, 3, \cdots, p_1$

$\phi_i = g_i(b) + \int_0^\tau h_i(z,b)\,dt \leqq 0$ (6)

$i = p_1+1, p_1+2, \cdots, p_2$

$b = [b_1, b_2, \cdots, b_m]^T$ は設計変数で，時間に独立であり，$z = [z_1(t), z_2(t), \cdots, z_n(t)]^T$ は状態変数と呼ばれ，応力や変位等を表わし，動的状態の下では時間に依存する量である。Mは質量マトリックス，Cは減衰マトリックス，Kは剛性マトリックスで，いずれも対称行列である。また，Qは外力ベクトルである。なお，ここでは時間 $t=0$ から $t=\tau$ までの間の動的過程における構造物の最適化を考える。

応力や変位を拘束条件とする場合は，一般に

$\eta(z,b) \leqq 0$ (7)

と表わされる。この形式は，式(5),(6)で表示される拘束条件とは異なった形をしており，そのままの形では取扱いが困難であるので，次のように書き直す。

$\phi_i = \int_0^\tau (\eta + |\eta|)\,dt = 0$ (8) または $\phi_i = \int_0^\tau \hat{\eta}^2\,dt = 0$ (9)

ただし $\hat{\eta} = \eta$ if $\eta \geqq 0$

$\hat{\eta} = 0$ if $\eta < 0$

式(7)と式(8)または(9)が等価であるかどうかは厳密には問題があるが，式(7)が成立すると式(8)または(9)が成立することは確かである。

3. 感度解析

式(1)～(6)で定義された最適化問題を解く方法として，Gradient Projection 法を用いる。

構造物が安定な挙動を示すと考えられる限り，設計変数bが微小量 δb だけ変化するとき，状態変数 $z(t)$ の変化 $\max|\delta z(t)|$ も十分小さいと考えてさしつかえない。bが δb だけ変化するとき，式(1),(5),(6)は

$$\delta\phi_i = g_{i,b}\delta b + \int_0^\tau (h_{i,b}\,\delta b + h_{i,z}\,\delta z)\,dt \quad (10)$$

$i = 0, 1, 2, \cdots, p_2$

だけ変化する。また，運動方程式(2)～(4)は

$$(M\ddot{z})_{,b}\delta b + M\delta\ddot{z} + (C\dot{z})_{,b}\delta b + C\delta\dot{z} + (Kz)_{,b}\delta b + K\delta z = Q_{,b}\delta b \quad (11)$$

$\delta z(0) = 0$ (12), $\delta\dot{z}(0) = 0$ (13)

となる。

ところで，式(10)において δz の項が消去できると，$\delta\phi_i$ と δb との関係が直接求まり，設計者にとって何かと便利であろう。

今 λ を

$$M\ddot{\lambda} - C\dot{\lambda} + K\lambda = -h_{i,z}^T \quad (14)$$

$M\lambda(\tau) = 0$ (15), $M\dot{\lambda}(\tau) - C\lambda(\tau) = 0$ (16)

の解とする。式(11)の $Q_{,b}\delta b$ を移項し，λ^T を左から掛けて，時間 $t=0$ から $t=\tau$ まで積分すると

$$\int_0^\tau \{\lambda^T(M\ddot{z})_{,b}\delta b + \lambda^T M\delta\ddot{z} + \lambda^T(C\dot{z})_{,b}\delta b + \lambda^T C\delta\dot{z} + \lambda^T(Kz)_{,b}\delta b + \lambda^T K\delta z - \lambda^T Q_{,b}\delta b\}\,dt = 0$$

$$\therefore \int_0^\tau \{\lambda^T(M\ddot{z})_{,b}\delta b + \ddot{\lambda}^T M\delta z + \lambda^T(C\dot{z})_{,b}\delta b - \dot{\lambda}^T C\delta z + \lambda^T(Kz)_{,b}\delta b + \lambda^T K\delta z - \lambda^T Q_{,b}\delta b\}\,dt + \lambda^T M\delta\dot{z}\Big|_0^\tau - \dot{\lambda}^T M\delta z\Big|_0^\tau + \lambda^T C\delta z\Big|_0^\tau = 0 \quad (17)$$

また，式(14)を転置して右から δz を掛けると

$$\ddot{\lambda}^T M\delta z - \dot{\lambda}^T C\delta z + \lambda^T K\delta z = -h_{i,z}\,\delta z \quad (18)$$

式(15),(16),(18)を式(17)に代入して整理すると

$$\int_0^\tau h_{i,z}\,\delta z\,dt = \int_0^\tau \lambda^T\{(M\ddot{z})_{,b} + (C\dot{z})_{,b} + (Kz)_{,b} - Q_{,b}\}\,\delta b\,dt \quad (19)$$

式(19)を式(10)に代入すると

$$\delta\phi_i = \left(g_{i,b} + \int_0^\tau [h_{i,b} + \lambda^T\{(M\ddot{z})_{,b} + (C\dot{z})_{,b} + (Kz)_{,b} - Q_{,b}\}]\,dt\right)\delta b$$

$$= l_i^T \delta b \tag{20}$$

ただし

$$l_i^T = g_{i,b} + \int_0^\tau [h_{i,b} + \lambda^T\{(M\ddot{z})_{,b} + (C\dot{z})_{,b} + (Kz)_{,b} - Q_{,b}\}]\,dt \tag{21}$$

式(20)は，設計変数がδbだけ変化すると目的関数及び拘束条件式がどれだけ変化するかを表わしている。l_iを感度ベクトル（sensitivity vector）と呼ぶ。

4. Gradient Projection 法

2節で定義された問題を解くにあたりまず設計変数$b^{(0)}$を仮定する。$b^{(0)}$が拘束条件の形成する領域（実行可能領域）の外にあるとすると，次のステップで設計変数をその実行可能領域に戻し，かつ目的関数が減少するように，δbを選べば良いわけである。したがって，δbを求める際必要となる拘束条件は，式(5)，(6)の内で条件を満足しない式だけである。それ等の式を

$$\tilde{\Phi} = \{\phi_i \mid i \in A\} \tag{22}$$

ただし $A = \{i \mid i = 1, 2, \cdots, p_1, \text{ and } i > p_1 \text{ for which } \phi_i \geqq 0\}$ で表わす。

故に，δbを求めることは，次の問題を解くことに帰着する。即ち

$$\text{目的関数}\quad \delta\phi_0 = l_0^T \delta b \tag{23}$$

$$\text{拘束条件}\quad \delta\phi_i = \tilde{l}_i^T \delta b - \Delta\tilde{\phi}_i = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, p_1 \tag{24}$$

$$\delta\phi_i = \tilde{l}_i^T \delta b - \Delta\tilde{\phi}_i \leqq 0 \quad i > p_1 \text{ and } i \in A \tag{25}$$

$$\delta b^T W \delta b - \xi^2 \leqq 0 \tag{26}$$

$\Delta\tilde{\phi}_i$は拘束条件式の修正量で，$\Delta\tilde{\phi}_i = -\phi_i,\ i \in A$ と取ることができる。式(1)～(6)は，設計変数bに関して一般に非線形となるが，それ等の式の摂動をδbの1次で近似しているため，$\|\delta b\|$は十分に小さくなければならない。したがって式(26)が必要になる。ξ^2は十分に小さな正数である。またWは重み行列で，一般に対角行列である。

ラグランジェ関数を導入すると，式(23)～(26)は次のように表わせる。

$$L = l_0^T \delta b + \gamma^T(\tilde{l}^T \delta b - \Delta\tilde{\Phi}) + \beta(\delta b^T W \delta b - \xi^2)$$

ただし，γ，βはラグランジェ乗数で，$\gamma = \{\gamma_i \mid i \in A\}$ かつ，$\gamma_i \geqq 0$ for $i > p_1$ で，$\beta \geqq 0$ である。また

$$\tilde{l} = \{l_i \mid i \in A\}, \quad \Delta\tilde{\Phi} = \{\Delta\tilde{\phi}_i \mid i \in A\}$$

である。

Kuhn-Tuckerの必要条件により

$$l_0^T + \gamma^T \tilde{l}^T + 2\beta\, \delta b^T W = 0 \tag{27}$$

$$\gamma^T(\tilde{l}^T \delta b - \Delta\tilde{\Phi}) = 0 \tag{28}$$

$$\beta(\delta b^T W \delta b - \xi^2) = 0 \tag{29}$$

式(27)～(29)を解いて

$$\delta b = -\frac{1}{2\beta}\delta b_1 + \delta b_2 \tag{30}$$

$$\delta b_1 = W^{-1}(l_0 + \tilde{l}\gamma_1) \quad (31), \qquad \delta b_2 = -W^{-1}\tilde{l}\gamma_2 \tag{32}$$

ただし，γ_1，γ_2はそれぞれ

$$\tilde{l}^T W^{-1} \tilde{l} \gamma_1 = -\tilde{l}^T W^{-1} l_0 \quad (33), \qquad \tilde{l}^T W^{-1} \tilde{l} \gamma_2 = -\Delta\tilde{\Phi} \tag{34}$$

の解である。

5. 最適化のアルゴリズム

前述の手法を整理すると次のようになる。

Step 1. 初期値$b^{(0)}$を選定する。

Step 2. 式(2)を解きzを求める。

Step 3. 式(5)，(6)を計算し，式(22)の$\tilde{\Phi}$を作る。

Step 4. $\phi_i,\ i \in A$に対応する式(14)～(16)を解き，$\lambda_i(t)$を求める。

Step 5. 式(21)より$l_i,\ i \in A$を計算する。

Step 6. $\Delta\tilde{\Phi}$を選ぶ。一般に$\Delta\tilde{\Phi} = -\tilde{\Phi}$とする。

Step 7. 式(33)，(34)よりγ_1，γ_2を求める。$\beta > 0$を選び$\gamma = \gamma_1 + 2\beta\gamma_2$を計算する。$\gamma$の中で負になる要素があれば，それに対応する添字をセットAの中から取り除いて新しい$\tilde{\Phi}$を作成し直し，Step 4に戻る。

Step 8. 式(31)，(32)よりδb_1，δb_2を求め，さらに式(30)よりδbを計算する。

Step 9. $b^{(k+1)} = b^{(k)} + \delta b$を計算する。

Step 10. $\|\delta b_1\|$，$|\phi_0^{(k+1)} - \phi_0^{(k)}|$が十分に小さく，かつ全ての拘束条件を満足している時には，イテレーションを打ち切る。そうでない時にはStep 2に戻る。

上記アルゴリズムを用いた計算例は当日会場にて発表する。

参考文献

1. Haug, E.J.; Engineering Design Handbook, U.S. Army Materiel Development and Readiness Command, September 1977
2. 松井，山本；振動数要求を満たす構造物の最適化問題，第34回土木学会年次学術講演会，I-294，1979-10.
3. 松井，山本；固有値を考慮した構造物の最適設計，第29回応用力学連合講演会，A112，1979-11.