I-333　マルコフ連鎖を用いた組合せ荷重生起の一解析法

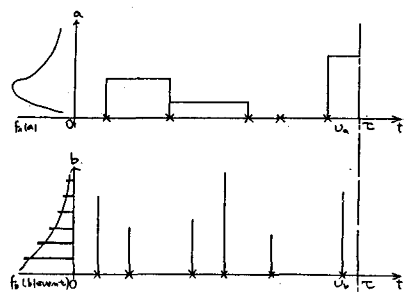
東京大学工学部　学生員　○佐藤尚次
筑波大学構造工学系　正員　西岡隆

1. 緒言

時間変動性を有する風・地震等の荷重を組合せた際の超過確率に対する既往の研究は、Bosshard (1975),[1] Wen (1977)等のものがある。また、最近、地震生起の確率モデルとしてマルコフ連鎖を利用することが考えられている。[2] 本報告は、後者のモデルを念頭において、組合せ荷重の生起確率を吸収状態をもつマルコフ連鎖で計算するための基礎的手法を提案し、その意義を考察せんとするものである。

2. 問題の設定

図1



例題として、図1の上に示すような(矩形ポワソン過程)モデルで与えられるP_Vと、下のような(ポワソン=ランダム過程)モデルのP_Hとを受ける図2のような骨組を考える。P_V, P_Hの生起は、各々期待値ν_a, ν_bの独立なポワソン過程とし、その確率密度函数も独立とする。種々の崩壊機構を考えることにより、骨組の非崩壊条件はP_VとP_Hの組が図3の斜線部の領域内にあることであるという結果を得る。従って、骨組の信頼性は、

$$P_r\left[\frac{l}{2}P_V + hP_H < 2(M_{p1}+M_{p2}) \cap P_H < \frac{2}{h}M_{p1}\right]$$

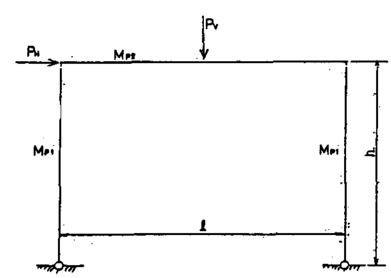
$$= P_r\left[\frac{l}{2}P_V + hP_H < 2(M_{p1}+M_{p2}) \,\middle|\, P_H < \frac{2}{h}M_{p1}\right] \cdot P_r\left[P_H < \frac{2}{h}M_{p1}\right]$$

で与えられる。問題を一般化して、図1の上、下でモデル化される$A(t)$, $B(t)$に対して

$$P_r[A(t)+B(t) \leq z,\ 0 \leq t \leq \tau] \cdots ①$$

を考えることにする。ここでBの確率密度函数は、マルコフ連鎖$\mathbb{P}=\{p_{ij}\}$が用いられるものとする。p_{ij}は$B=b_i$の次のBの生起時に$B=b_j$となる確率である。

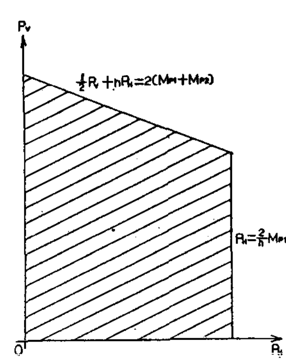
図2



3. 解析手法

マルコフ連鎖の遷移行列$Q=\{q_{ij}\}$のk行目が$q_{kj}=\begin{cases}1 & j=k\\ 0 & j\neq k\end{cases}$であるならば、$Q$で表現される連鎖は、一端$k$番目の状態に至った後は、その状態を継続することになる。この状態のことを「吸収状態」という。構造物は一度過大な荷重を受けて破壊に至れば、以後の使用に耐えない。この「破壊」(即ち少なくとも一度$A(t)+B(t) \geq z$となった状態)を吸収状態におき、上記の①式を計算するためのマルコフ連鎖を考える。(ここで用いるマルコフ連鎖(Q)は、信頼性を計算するためのもので、前出のBの確率モデル($\mathbb{P}$)とは異なる(Qは$\mathbb{P}$を含む)ことに注意を要する。)

図3



今、現在破壊状態(吸収状態)にないものとし、現在継続中のA波が始まってから生じた最大のBの値をb_{ia}, 最近に生じたBの値をb_{ic}とする。$\nu_a' = \nu_a/(\nu_a+\nu_b)$, $\nu_b' = \nu_b/(\nu_a+\nu_b)$とおくと、何らかの荷重生起があったとき、それが$A$である確率は$\nu_a'$, Bはν_b'である。Aが起こって破壊に至らない確率は$F_A(z)$, またBが起こったときその値がb_jである確率はp_{icj}で、現在破壊状

態にないことから、現在のAの値は$z-b_{ic}$よりも小さいことがわかっているのであるから、$b_j \leq b_{ic}$なら破壊は起こらず、$b_j > b_{ic}$のときは、破壊に至らない確率は $F_A(z-b_j)/F_A(z-b_{ic})$ となる。以上のことを示したのが図4である。図4から(i_c, i_a)を一つの状態としてとって、遷移行列Qがつくられ、初期状態確率行ベクトル$\pi^{(0)}$を用いて、

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\nu_a+\nu_b)^n\tau^n}{n!}e^{-(\nu_a+\nu_b)\tau}\,\pi^{(0)}Q^n$$

から信頼性が計算できる。しかし、この手法では時間τ内の荷重生起回数nについて無限和をとらねばならない。

今、$\Delta t=\tau/N$, $1/N \ll 1$ ととれば、ポワソン分布の希小性から時間Δt経過に伴う状態変化の様相を図5のように示すことができる。図5から得られる行列をQ'とすると$\pi^{0}Q'^{N}$を計算するだけで信頼性が得られる。Q'^{N}の$N\to\infty$の極限(Q'^{∞}と書く)は、$Q'=E+R\Delta t$と書けることに注目すれば収束性が証明でき、(これから$Q'^{\infty}=\exp(\tau R)$、Rを対角化して、$Q'^{\infty}=D\exp(\tau D^{-1}RD)D^{-1}$を得る)$R=(\nu_a+\nu_b)(Q-E)$に注目すれば、この極限と前者の結果の一致も証明できる。数値計算には後者の手法を用いるのが便利である。

図4

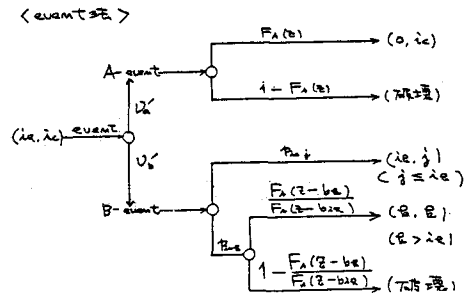
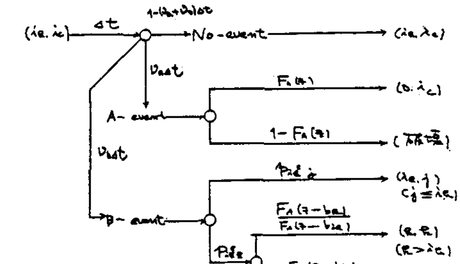


図5



4. 数値計算

$\alpha=M_{p1}/M_{p2}$, $\beta=h/\ell$, $\gamma=M_{p2}/\ell\bar{P}_V$, $\delta=\bar{P}_H/\bar{P}_V$ 等とおいて、若干の仮定のもとに信頼性を試算した結果を図6−(a),(b)に示す。安全率のパラメータγを少しく小さめにとったため、構造パラメータα, βの違いによって結果に大きなばらつきが出たが、定性的には妥当な結果と思われる。

図6−(a)

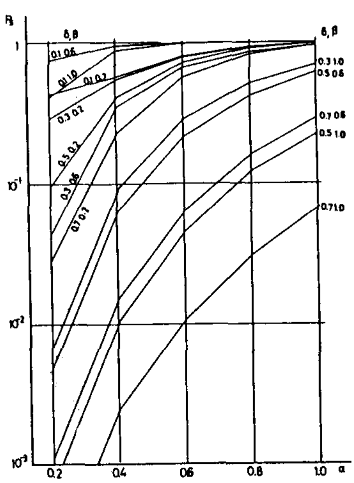
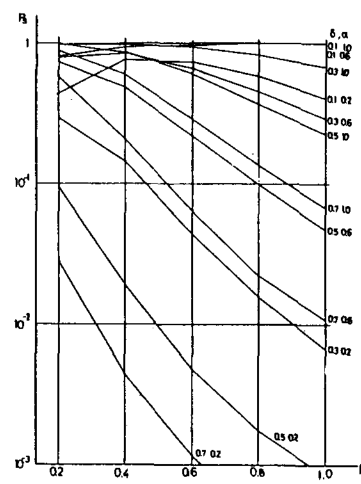


図6−(b)



5. 結び

本手法の特長は、一つには、初めに述べたように地震のマルコフ連鎖モデルを計算の中に組み入れられることである。逆にいえば、マルコフ連鎖モデルを利用するかしないかでどの程度差が出てくるかを検証することもできるであろう。また、更に大きな特長は、数値計算の実行が容易なことである。様々な構造形状に対し破壊確率p_Fが容易に求められる、ということから、反復的な手法によりp_Fを目的函数とした最適設計も可能で、更には$C_T=C_I+p_FC_F$の形の総費用最小化問題にも応用できるであろう。

参考文献：(イ) Bosshard. W. 「On Stochastic Load Combination」 (Stanford Univ.)
(ロ) 西岡, Shah 「マルコフ連鎖を用いた地震生起の確率モデルに関する二、三の考察」 (第34回 年次講演会 I−154)