

中央大学 土木 正員 川原 睦人

○ 中央大学大学院 学生員 平野 廣和

1. はじめに

近年、構造物の多様化や大型化によって、その周辺の風の流れが複雑な挙動を示すようになってきている。特に、高架橋・大スパン橋・吊橋などでは風の流れの挙動を正確に把握することがしばしば問題となってきている。しかしながら、ほとんどの場合この挙動を知るには、風洞実験等による解析が唯一の方法であるのが現状である。本論文では、温度一定の圧縮性を含む流体を考え、有限要素法を用いて2次元解析及び3次元解析を提案する。

2. 圧縮性を考慮した流れの基礎方程式

温度が一定であると仮定し、圧縮性が存在する流体の状態方程式を次のように定義する。

$$P = P(\rho) \quad (1)$$

P は圧力、 ρ は密度である。質量保存式は、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho u_i)_{,i} = 0 \quad (2)$$

とする。式(1)を時間 t で全微分して、

$$\frac{DP}{Dt} = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right) \cdot \frac{D\rho}{Dt} \quad (3)$$

とする。また式(2)は次のように変形される。

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho u_{i,i} \quad (4)$$

式(3)に式(4)を代入し整理すると次式が求まる。

$$\frac{\partial P}{\partial t} + u_i P_{,i} + \beta u_{i,i} = 0 \quad (5)$$

ここで、 β は次のように定義される。

$$\beta = \rho \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)$$

もし、 β が無限大となると、 $\frac{DP}{Dt}$ が有限の値を取るならば、 $u_{i,i} = 0$ となる関係を保つことができる。すなわち、 β を無限大とすることにより、非圧縮の流れを表現することが可能となる。式(5)を連続の方程式とする。

運動方程式は、次のように与えられる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j u_{i,j} + P_{,i} + \lambda u_{i,j,j} - \nu (u_{i,j} + u_{j,i}) + f_i = 0 \quad (6)$$

ここで u_i は流速、 t は時間、 ν は渦動粘性係数、 f_i は外力を表わす。

式(5)と式(6)を連立させて解くことを検討する。境界条件としては次の条件を用いる。

$$u_i = \hat{u}_i \text{ on } S_1, \quad S_i = (P \delta_{ij} + \tau_{ij}) \eta_j = \hat{S}_i \text{ on } S_2, \quad P = \hat{P} \text{ on } S_3 \quad (7)$$

3. 有限要素法

形状関数は各未知数 u_i (流速)・ P (圧力) に対して、2次元解析は3角形3節点の1次要素、3次元解析は6面体8節点の1次要素を用いる。式(5)・式(6)に重み関数を乗じて領域 V で積分を行う。さらに時間方向に対しては、

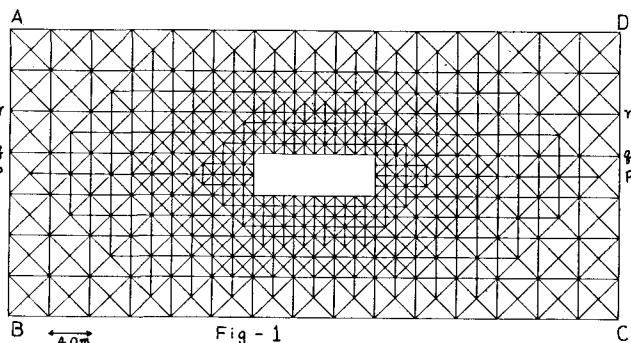


Fig-1

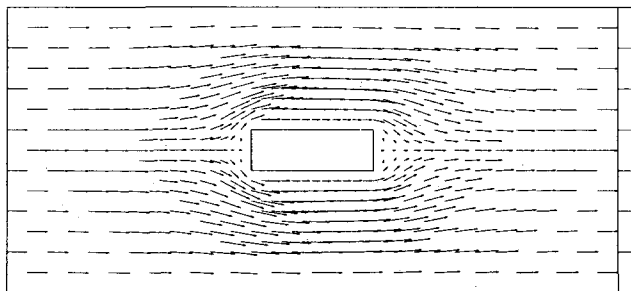


Fig-2

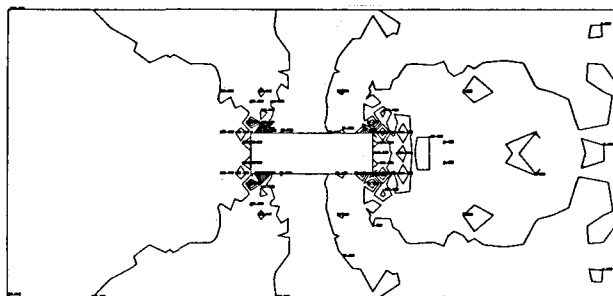


Fig-3

2段階ラックス・ウェンドルフ法を用いる。 $U_i = \bar{\alpha}_a U_{di}$, $P = \bar{\alpha}_a P_a$ 各式は次のように表わされる。

第1段階

$$\bar{M}_{d\beta} U_{\beta}^{n+1/2} = \bar{M}_{d\beta} U_{\beta}^n - \frac{\Delta t}{2} (K_{d\beta\tau} U_{\beta}^n U_{\tau}^n - H_{d\beta} P_{\beta}^n) \quad (8)$$

$$\bar{M}_{d\beta} P_{\beta}^{n+1/2} = \bar{M}_{d\beta} P_{\beta}^n - \frac{\Delta t}{2} (\beta H_{\beta a} U_{\beta}^n + A_{d\beta\tau} U_{\beta}^n P_{\tau}^n) \quad (9)$$

第2段階

$$\bar{M}_{d\beta} U_{\beta}^{n+1} = \bar{M}_{d\beta} U_{\beta}^n - \Delta t (\hat{\Omega}_a^n + S_{d\beta} U_{\beta}^n + K_{d\beta\tau} U_{\beta}^{n+1/2} U_{\tau}^{n+1/2} - H_{d\beta} P_{\beta}^{n+1/2}) \quad (10)$$

$$\bar{M}_{d\beta} P_{\beta}^{n+1} = \bar{M}_{d\beta} P_{\beta}^n - \Delta t (\beta H_{\beta a} U_{\beta}^{n+1/2} + A_{d\beta\tau} U_{\beta}^{n+1/2} P_{\tau}^{n+1/2}) \quad (11)$$

各係数マトリックスは、以下に示す。

$$M_{d\beta} = \int_V (\bar{\alpha}_a \cdot \bar{\alpha}_\beta) dV, \quad K_{d\beta\tau} = \int_V (\bar{\alpha}_a \cdot \bar{\alpha}_\beta \cdot \bar{\alpha}_{\tau i}) dV, \quad H_{d\beta} = \int_V (\bar{\alpha}_{a i} \bar{\alpha}_\beta) dV$$

$$S_{d\beta} = -\lambda \int_V (\bar{\alpha}_{a i} \bar{\alpha}_{\beta j}) dV + \nu \int_V (\bar{\alpha}_{a i} \bar{\alpha}_{\beta j}) dV + \nu \int_V (\bar{\alpha}_{a i} \bar{\alpha}_{\beta j}) d_{ij} dV$$

$$A_{d\beta\tau} = \int_V (\bar{\alpha}_a \cdot \bar{\alpha}_{\beta i} \bar{\alpha}_{\tau}) dV, \quad \hat{\Omega}_{ai} = \int_{S_a} (\bar{\alpha}_a \cdot \hat{S}_i) dS - \int_V (\bar{\alpha}_a \hat{f}_i) dV$$

$$\bar{M}_{d\beta} = \alpha M_{d\beta} + (1 - \alpha) \bar{M}_{d\beta} \quad \bar{M}_{d\beta} : \text{集中行列}$$

4. 数値計算例

Fig-1に示す長方形流路内に、長方形断面の構造物 ($t/d = 1/3$) を置いて、この構造物への風による影響を計算した。計算条件としては、無風状態の所に突然10.0%の風が吹き始めて、それが定常状態に達するまでを追跡した。境界条件としては、表-1に示すものとした。また方程式の各係数は、表-2に示すものとした。なお、圧力に関しては、運動方程式の圧力項を部分積分して、式(7)における $\hat{S}_i = 0$ とした。以

境界	境界条件値
辺: A-B	$U=10.0\text{ m/s}$ $V=0.0\text{ m/s}$
辺: B-C	$U=0.0\text{ m/s}$
辺: C-D	$U=0.0\text{ m/s}$
辺: D-A	$U=0.0\text{ m/s}$
構造物の周り	$U=0.0\text{ m/s}$ $V=0.0\text{ m/s}$

表-1 境界条件

上の条件で計算を行い、収束したと考えられる4800回目 (Time=12s) の計算結果をプロットした。Fig-2には流速のベクトル図を、Fig-3には圧力の等圧線図を示す。

係数	係数値
β	10^6
Δt	0.0025s
α	0.3
λ	0.0
ν	$0.01\text{ m}^2/\text{s}$

表-2 各係数

Fig-4は、横方向の圧力変動をグラフ化したものであり、Fig-1に示すP-P断面の変動が●、θ-θ断面が×、γ-γ断面が○を示している。流速に関しては、非圧縮の場合、構造物の周辺で流速が大きく加速されるのに対して、本計算ではそれに比べて加速される割合が少々小さいようである。ゆえに、圧縮されている傾向が表われている。また小さなうずが、構造物の背後で生じようとしている。圧力に関しては、断面の前面で最大値を取り、背後で最小値を取っている。特に構造物の表面では、側面をそうにしたがって圧力が急激に低下して負圧となり、また正圧となりながら、背後に回ると大きく負圧となっている。しかし、まだ構造物の回りメッシュが少々荒いためか圧力の変動量が多少大きいようである。メッシュをもう少し細かくする必要があるだろう。なお、計算に要した時間は、578節点、1080要素で、東京大学大型計算機センター (HITAC 8800/8700) を用いて40分であった。

5. 終わりに

この論文で述べた方法により、圧縮性を考慮した流体 (風) の流れの解析が可能となったと考える。なお、3次元解析の問題については、講演会の場で発表の予定である。最後に、本論文の計算は、中央大学学生、山家恭介君と児玉敏雄君の協力のもとに行なった。ここに記して感謝の意を表わす。

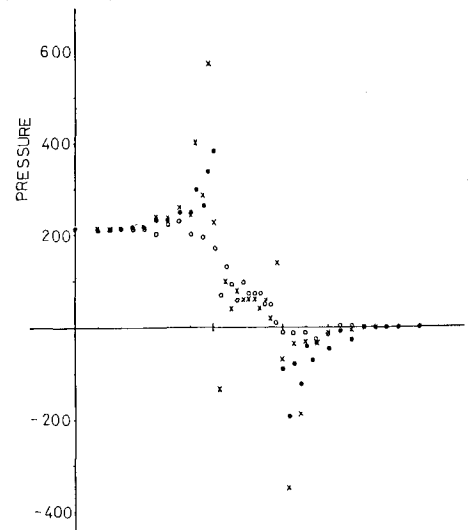


Fig-4