I -290　液体－構造－地盤連成系の振動解析

鹿島建設電算センター　正員　今井　貫爾
〃　正員○阪東　浩造
鹿島建設土木設計本部　正員　磯岩　和夫

1. はじめに

本報文は，流体を含んだ構造が地盤上又は地盤内におかれたときの地震時性状を明らかにすることを目的とする。 特に，地震時の流体動液圧を算定する。 使用される解析手法は有限要素法で，軸対称問題としてとりあつかわれる。 複雑な連成系を簡単化するために，次の様な仮定が設けられる。 ①構造とその基礎地盤は弾性とする。 また，構造と基礎の離れ（浮き上り）は許さない。 ②構造－地盤系の減衰としては粘性減衰だけを考える。 ③流体運動は，非粘性，非圧縮，非回転であるとする。 ④流体の自由表面上に存在する波は微小振幅波であるものとする。 又自由表面波はその上に存在する空気との摩擦によって粘性減衰力を受けるものとする。 ⑤地震動は水平面内の剪断波による面内振動と鉛直加振の二つの場合を独立に考え，鉛直，水平加振が重なりあっている場合は考えない。 以上の簡単化によって以下に示すような簡単な解析が可能であるが，上の仮定のうちのいくつかは，工学上不満足なものがある。 特に地盤を線型材料と仮定していることである。 又自由表面波を微小振幅波としていることである。 いずれにしてもここにあげた仮定は，現実の非線型問題を線型化する仮定が大部分であることに留意されたい。 しかし線型方程式を解くことが，まずこの方面の第一ステップとして設計に資するものと考えられる。

2. 連成運動方程式

流体圧力を受ける構造－地盤系の運動は，一般に次の様にかける。

$$[M]\ddot{U} + [C]\dot{U} + [K]U = [N]P \qquad (1)$$

ここに〔M〕,〔C〕,〔K〕は，それぞれ質量，減衰，剛性マトリックスであり，〔N〕は流体の圧力影響マトリックスである。 ベクトルU，Pはそれぞれ変位，圧力ベクトルである。 一方流体の運動方程式は，

$$[m]\ddot{P} + [c]\dot{P} + [k]P = [\ell]\ddot{U} \qquad (2)$$

とかける。 ここに〔m〕,〔c〕,〔k〕はそれぞれ流体の質量，減衰，剛性マトリックスであり，〔ℓ〕は構造の加速度影響マトリックスである。 一般に〔N〕と〔ℓ〕との間には〔ℓ〕$= -\rho_L$〔N〕^{T} の関係がある。 （ここに添字Tはマトリックスの転置を表わし，ρ_L は流体の単位体積あたりの質量である。） 方程式（1），（2）は連成系である。 さて，地震解析をするために構造変位ベクトルを次の様に分解する。 $U^T = \{U_I^T, U_B^T\}$。 ここに U_I は地震が入力しない内点の節点変位ベクトルで U_B は地震入力基盤の節点変位ベクトルである。 又，（2）式の質量，減衰マトリックスが流体自由表面の自由度だけ非零であり，流体内点に関して零であることを利用して，Pを $P^T = \{P_S^T, P_i^T\}$ と分解する。 ここに P_S は流体の自由表面上の自由度よりなる圧力ベクトルで P_i は流体自由表面を除いた内点の自由度よりなる圧力ベクトルである。 以上の分割に対して（1），（2）式はそれぞれ次の様にかける。

$$\left[\begin{array}{c|c} M_{II} & M_{IB} \\ \hline M_{BI} & M_{BB} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \ddot{U}_I \\ \hdashline \ddot{U}_B \end{array}\right\} + \left[\begin{array}{c|c} C_{II} & C_{IB} \\ \hline C_{BI} & C_{BB} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \dot{U}_I \\ \hdashline \dot{U}_B \end{array}\right\} + \left[\begin{array}{c|c} K_{II} & K_{IB} \\ \hline K_{BI} & K_{BB} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} U_I \\ \hdashline U_B \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{c|c} N_{IS} & N_{Ii} \\ \hline N_{BS} & N_{Bi} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} P_S \\ \hdashline P_i \end{array}\right\} \qquad (3)$$

$$\left[\begin{array}{c|c} m_{SS} & o \\ \hline o & o \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \ddot{P}_S \\ \hdashline \ddot{P}_i \end{array}\right\} + \left[\begin{array}{c|c} c_{SS} & o \\ \hline o & o \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \dot{P}_S \\ \hdashline \dot{P}_i \end{array}\right\} + \left[\begin{array}{c|c} k_{SS} & k_{Si} \\ \hline k_{iS} & k_{ii} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} P_S \\ \hdashline P_i \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{c|c} \ell_{SI} & \ell_{SB} \\ \hline \ell_{iI} & \ell_{iB} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \ddot{U}_I \\ \hdashline \ddot{U}_B \end{array}\right\} \qquad (4)$$

（4）式の第二行目より

$$P_i = k_{ii}^{-1}(-k_{iS}P_S + \ell_{iI}\ddot{U}_I + \ell_{iB}\ddot{U}_B) \qquad (5)$$

をうる。 これを（4）式の第一行目に代入すれば

$$m_{SS}\ddot{P}_S + c_{SS}\dot{P}_S + k_{SS}^{*}P_S = \ell_{SI}^{*}\ddot{U}_I + \ell_{SB}^{*}\ddot{U}_B \qquad (6)$$

を得る。 ここに $k_{SS}^{*} = k_{SS} - k_{Si}\,k_{ii}^{-1}\,k_{iS}$ ， $\ell_{SI}^{*} = \ell_{SI} - k_{Si}\,k_{ii}^{-1}\,\ell_{iI}$ ，

$\ell_{SB}^{*} = \ell_{SB} - k_{Si}\, k_{ii}^{-1}\ \ell_{iB}$ である。一方，（５）式を（３）式の一行目に代入すれば，P_i を消去した構造の内点の運動方程式を得る。

$$M_{II}^{*}\ \ddot{U}_I + C_{II}\dot{U}_I + K_{II}U_I = N_{IS}^{*}\ P_S + M_{IB}^{*}\ \ddot{U}_B - K_{IB}U_B \qquad (7)$$

ここに $M_{II}^{*} = M_{II} - N_{Ii}k_{ii}^{-1}\ \ell_{iI}$, $N_{IS}^{*} = N_{IS} - N_{Ii}k_{ii}^{-1}\ k_{iS}$, $M_{IB}^{*} = -M_{IB} + N_{Ii}\ k_{ii}^{-1}\ \ell_{iB}$ である。結局連立させて解くべき方程式は（６），（７）であるが，（７）式の右辺に基盤の変位 U_B が含まれているので，構造変位を静的な部分と動的な部分とにわけて消去する。

$$\left\{\begin{array}{c} U_I \\ \hline U_B \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} U_I{}^d \\ \hline O \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} U_I{}^S \\ \hline U_B{}^S \end{array}\right\} \qquad \text{ここに} K_{II}\ U_I{}^S + K_{IB}\ U_B{}^S = O \qquad (8)$$

（８）式の分割に応じて，（６），（７）式は，次の様になる。

$$M_{II}^{*}\ \ddot{U}_I{}^d + C_{II}\ \dot{U}_I{}^d + K_{II}\ U_I{}^d = M_{IB}^{**}\ddot{U}_B{}^S + N_{IS}^{*}\ P_S \qquad (9)$$

$$m_{SS}\ \ddot{P}_S + c_{SS}\ \dot{P}_S + k_{SS}^{*}\ P_S = \ell_{Si}^{*}\ \ddot{U}_I{}^d + \ell_{SB}^{**}\ \ddot{U}_B{}^S \qquad (10)$$

ここに $M_{IB}^{**} = M_{IB}^{*} + M_{II}K_{II}^{-1}\ K_{IB}$, $\ell_{SB}^{**} = \ell_{SB}^{*} - \ell_{Si}^{*}\ K_{II}^{-1}K_{IB}$ である。地震が一様に基盤に入力されるとすると $\ddot{U}_B{}^S = V\ddot{\delta}$ とかけるので（ここに $\ddot{\delta}$ は地震の加速度記録，Ｖは地震入力ベクトル），（９），（10）式は解くべき連立方程式になる。

3. モード解析

（９），（10）式は多次元連立方程式なので，一般にこのままでは数値積分不可能である。そこで，$X^T = \{\ U_I^d\ ,\ P_S\ \}^T$ を未知数とする一本の式に組みなおして，固有値解析するのが常法であるが，生ずる固有値問題は非対称マトリックス系となるために，大規模複素固有値問題を解くことになる。ここでは構造と流体の固有周期の帯域がはずれていることを利用して別々の固有値問題として解く。（９），（10）式において外力，減衰力をそれぞれ零とおけば，

$$\omega^2\ M_{II}^{*}\ \bar{U}_I = K_{II}\ \bar{U}_I,\quad \lambda^2\ m_{SS}\ \bar{P}_S = k_{SS}^{*}\ \bar{P}_S \qquad (11)$$

を得る。ここに ω^2, λ^2 はそれぞれ構造，流体の固有値であり，$\bar{U}_I, \bar{P}_S$ はそれぞれの固有ベクトルである。

（11）式の固有値問題は実対称マトリックスに対する固有値問題であり，解くのは非常に簡単である。この様にして得られた固有ベクトルを用いてモード分解 $U_I{}^d \doteqdot \bar{\bar{U}}q, P_S \doteqdot \bar{\bar{P}}r$ （ここに $\bar{\bar{U}}$, $\bar{\bar{P}}$ はそれぞれのモードを列ベクトルとしたモードマトリックス，q , r は一般化座標）してやれば，結局（９），（10）式は次の様になる。

$$\left[\begin{array}{c|c} \ddots 1 & O \\ \hline -R_i & \ddots 1 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \ddot{q} \\ \hline \ddot{r} \end{array}\right\} + \left[\begin{array}{c|c} 2h_i\omega_i & O \\ \hline O & 2e_i\lambda_i \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \dot{q} \\ \hline \dot{r} \end{array}\right\} + \left[\begin{array}{c|c} \omega_i^2 & -Q_i \\ \hline O & \lambda_i^2 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} q \\ \hline r \end{array}\right\} = \ddot{\delta} \left\{\begin{array}{c} c_i \\ \hline d_i \end{array}\right\} \qquad (12)$$

ここに R_i , Q_i は一般化質量を単位としたときに生じて来る係数列マトリックスで，流体と構造の連成効果を表わしている。 h_i , e_i は構造と流体に対する各次モードの減衰定数である。 c_i , d_i はモード分担係数で，$\ddot{\delta}$ は実地震加速度記録である。（12）式は非対称マトリックス系であるが，その自由度は減少しているので直接積分することは容易である。なお本研究においては（11）式の固有値問題はサブスペース法で解かれ（12）式の積分はウィルソン法でおこなわれた。

4. 応用例

上述の解析が半地下式ＬＮＧタンク（地盤をも含めて）に適用されたが，詳細は紙面の関係上割愛したい。

しかし，動液圧に関係する各種要因のうち，表面波の波形の影響とタンク本体の変形の影響は小さく，地盤の変形による動液圧が卓越していることが確認された。又，地震時の地盤の加速度がわかれば，ハウスナーの公式を用いて動液圧を算定しても良い近似を与えていることが確認された。鉛直加振の場合は動液圧は従来よりの震度法で設計してもさしつかえないということも確認された。なお詳細は当日発表する予定である。