

室蘭工業大学 正員 松岡健一
北海道大学 正員 能町純雄

1. まえがき 鉄筋コンクリートなどは、その一部を取り出し、モデル化して考えれば、異なる材料でできに二相同心円柱と考えることも出来る。この動的な問題の解析は、これまでそれほど行はれてはいないようである。著者等は、これまで二相同心円柱を伝わる弾性波の問題を解析してきた。^(1,2) 本論文は、この振動問題の基本的なものとして、両端が単純に支持された同心円柱が、周期的な外力をうける場合の解析を行なったものであり、円柱内部の変形および応力状態を求め、これに検討を加えにものである。

2. 基礎方程式のフーリエ・ハンケル変換による解 二相同心円柱は、円筒と円柱を組合せて解析することができるが、円柱の解析は円筒から導くことができるので、まず円筒の解を示す。この場合の解は、円筒の半径方向を r 、接線方向を θ 、軸方向を z 、それぞれ x, y, z の方向の変位成分を u, v, w とし、外力を周期的な力で定常状態に限定するものとすれば、円柱座標で表わされる変位運動方程式からフーリエ・ハンケル変換により

$$u = \frac{z}{\pi C} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_m (\tilde{A}_{mnr} + \tilde{B}_{mnr}) \cos m\theta \sin Nz \cdot e^{i\omega t} \quad (1)$$

$$v = \frac{z}{\pi C} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (\tilde{A}_{mnr} - \tilde{B}_{mnr}) \sin m\theta \sin Nz \cdot e^{i\omega t} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{mnr} = & \frac{z}{\pi C} \left\{ \frac{1}{N_{\mu}} \chi_{mp}^{(k)}(N_{\mu}r) \left[\frac{1}{2\mu} \alpha_{mnk} + (m+1) A_{mnk} \right. \right. \\ & \left. \left. + (m-1) B_{mnk} + \frac{N}{2} E_{mnk} \right] + \frac{\mu N^2}{\rho \omega^2} \left\{ \frac{1}{N_{\mu}} \chi_{mp}^{(k)}(N_{\mu}r) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{N_{\mu}}{N^2} \chi_{mp}^{(k)}(N_{\mu}r) \right\} \left[\frac{1}{2\mu} \beta_{mnk} + (m+1) A_{mnk} - (m-1) B_{mnk} \right. \right. \\ & \left. \left. + N E_{mnk} \right] \right\} \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{mnr} = & \frac{z}{\pi C} \left\{ -\frac{1}{N_{\mu}} \chi_{ms}^{(k)}(N_{\mu}r) \left[\frac{1}{2\mu} \alpha_{mnk} + (m+1) A_{mnk} \right. \right. \\ & \left. \left. + (m-1) B_{mnk} - \frac{N}{2} E_{mnk} \right] + \frac{\mu N^2}{\rho \omega^2} \left\{ \frac{1}{N_{\mu}} \chi_{ms}^{(k)}(N_{\mu}r) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{N_{\mu}}{N^2} \chi_{ms}^{(k)}(N_{\mu}r) \right\} \left[\frac{1}{2\mu} \beta_{mnk} + (m+1) A_{mnk} - (m-1) B_{mnk} \right. \right. \\ & \left. \left. + N E_{mnk} \right] \right\} \quad (4) \end{aligned}$$

$$w = \frac{z}{\pi C} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_m C_n \tilde{w}_{mnr} \cos m\theta \cos Nz \cdot e^{i\omega t} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{mnr} = & \frac{z}{\pi C} \left\{ G_m^{(k)}(N_{\mu}r) E_{mnk} - \frac{2\mu N}{\rho \omega^2} \left\{ G_m^{(k)}(N_{\mu}r) \right. \right. \\ & \left. \left. - G_m^{(k)}(N_{\mu}r) \right\} \left[\frac{1}{2\mu} \beta_{mnk} + (m+1) A_{mnk} - (m-1) B_{mnk} \right. \right. \\ & \left. \left. + N E_{mnk} \right] \right\} \quad (6) \end{aligned}$$

ここで、 C は円筒の長さ、 $C_0 = 1/2$, $C_1 = C_2 = \dots = 1$,

$N = n\pi/C$, ($n, m = 0, 1, 2, \dots$), であり、 ρ は円筒の密度、 ω は外力の円振動数であり、

$$N_{\mu}^2 = N^2 - \rho \omega^2 / \mu, \quad N_{\lambda}^2 = N^2 - \rho \omega^2 / (2\mu + \lambda)$$

μ, λ は Lamé の弾性定数。また式中の関数は、ハンケル変換の逆変換公式よりえられるもので、円筒の外半径を a_1 、内半径を a_2 とすれば、

$$\left. \begin{aligned} G_m^{(k)}(Nr) &= R_{m,m}^{(k)}(Nr) / R_{m,m}^{(k)}(Na_k), \\ \chi_{mp}^{(k)}(Nr) &= R_{m+1,m}^{(k)}(Nr) / R_{m+1,m}^{(k)}(Na_k), \\ \chi_{ms}^{(k)}(Nr) &= R_{m-1,m}^{(k)}(Nr) / R_{m-1,m}^{(k)}(Na_k), \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

$$\left. \begin{aligned} R_{j,m}^{(k)}(Nr) &= I_j(Nr) K_m(Na_{k-1}) - (-1)^{j+m} I_m(Na_{k-1}) K_j(Nr), \\ j &= m-1, m, m+1, \quad a_1 = a_2, \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

式中の係数 $\alpha_{mnk}, \beta_{mnk}, A_{mnk}, B_{mnk}, E_{mnk}$ は、円筒の内外面の応力や変位で与えられる未知定数である。

また、式(1)~(6)で与えられる解は、式から明らかのように、円筒の両端面 ($z=0, C$) で次の条件を満足する場合である。

$$(u)_{z=0, C} = (v)_{z=0, C} = (w)_{z=0, C} = 0 \quad (c)$$

この条件は一種の単純支持の条件である。この他に条件の場合はまた別形で求められるが、ここでは一般的な解の形は省略する。

上の解は円筒を対象として示したが、円柱の場合も同じように求められる。式(3), (4), (6)で $a_2 = 0$ とすることにより与えられ、このとき $m = 1$ のみとなり、式中の関数も(6)式で

$$R_{j,m}^{(k)}(Nr) = R_{j,m}^{(1)}(Nr) = I_j(Nr) \quad (d)$$

とおくことにより与えられる。また式(6), (d)の I, K は変形ヤング係数およびポアソン比のベッセル関数である。

この円筒の解と円柱の解を組合せて、各境界の境界条件を満足するように未知定数を求めることにより、各変位成分が求められる。フーリエの法則から応力成分を求めることができる。

3. 境界条件 二相同心円柱は

図-1に示すように、円柱をとりまいて弾性定数の異なる材料でできに円筒が、同心円状に重ねられ

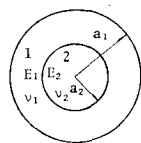


図-1 二相同心円柱

ているものとする。いま、円筒の弾性定数、変位応力など全てのものを添字 1、円柱のものを添字 2 で表すものとする。まず境界条件を考えるに先づ式 (8) の導出過程から、次の適合条件を満足しなければならぬ。

1) 円筒に対して

$$A_{mnk,1} = \tilde{A}_{mnr,1} \quad r=a_k \quad k=1,2 \quad (7)$$

$$B_{mnk,1} = \tilde{B}_{mnr,1} \quad r=a_k \quad k=1,2 \quad (8)$$

2) 円柱に対して

$$A_{mn1,2} = \tilde{A}_{mnr,2} \quad r=a_2 \quad (9)$$

$$B_{mn1,2} = \tilde{B}_{mnr,2} \quad r=a_2 \quad (10)$$

次に境界条件は

3) $r=a_1$ における条件：円筒の外周には半径方向の周期力のみが作用するものとするれば

$$i) \quad \sigma_{r1}|_{r=a_1} = p(\theta, z) \\ \therefore \beta_{mn1,1} = \int_0^{2\pi} \int_0^c p(\theta, z) \cos m\theta \sin Nz dz d\theta \quad (11)$$

$$ii) \quad \tau_{\theta r1}|_{r=a_1} = 0, \quad \therefore \alpha_{mn1,1} = 0 \quad (12)$$

$$iii) \quad \tau_{rz1}|_{r=a_1} = 0 \quad (13)$$

4) $r=a_2$ における条件：円柱と円筒の接触面では変位およびこの面の応力が等しいものとするれば

$$iv) \quad (u_1)_{r=a_2} = (u_2)_{r=a_2}, \quad (v_1)_{r=a_2} = (v_2)_{r=a_2} \\ \therefore A_{mn2,1} = A_{mn1,2}, \quad B_{mn2,1} = B_{mn1,2} \quad (14)$$

$$v) \quad (w_1)_{r=a_2} = (w_2)_{r=a_2}, \quad \therefore E_{mn2,1} = E_{mn1,2} \quad (15)$$

$$vi) \quad (\sigma_{r1})_{r=a_2} = (\sigma_{r2})_{r=a_2}, \quad \therefore \beta_{mn2,1} = \beta_{mn1,2} \quad (16)$$

$$vii) \quad (\tau_{\theta r1})_{r=a_2} = (\tau_{\theta r2})_{r=a_2} \quad \therefore \alpha_{mn2,1} = \alpha_{mn1,2} \quad (17)$$

$$viii) \quad (\tau_{rz1})_{r=a_2} = (\tau_{rz2})_{r=a_2} \quad (18)$$

以上の条件から未知定数を求め、変位および応力を求めることとなる。

4. 数値計算例 数値計算例として、簡単な場合の結果を示す。外力は円筒軸に対して対称 ($m=0$) で、円筒の長さの方向に $\sin$ 分布しているものとする。すなわち $p(\theta, z) = p \sin(\pi z/c)$ 。また計算に用いた数値は、ポアソン比 $\nu_1 = 1/6$, $\nu_2 = 0.3$, ヤング係数比 $E_2/E_1 = 7.0$, 密度比 $\rho_2/\rho_1 = 3.2$ で $a_2/a_1 = 0.25$ である。外力の周期 ($T = 2\pi/\omega$) と円柱の長さ c を変化させて計算した結果を図-2~4 に示す。図中のものは、円筒部と同じ材料の弾性体を伝わるせん断波が円柱を往復する時間 t_0 、せん断波の速度を V_2 とし

$$t_0 = 2c/V_2 = 2c\sqrt{\rho_1/\mu_1}$$

である。図には $z=0$ における軸方向変位 w (図-2)

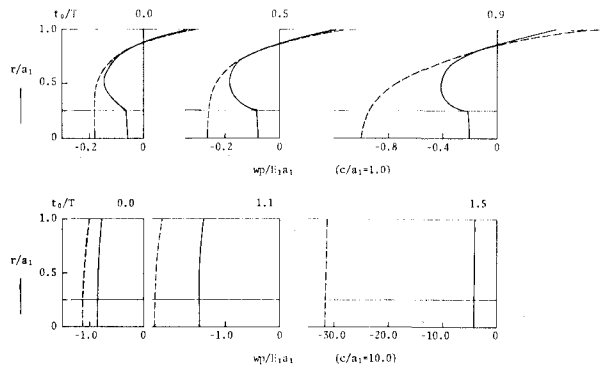


図-2 軸方向変位 w の r 方向の変化 ($z=0$)

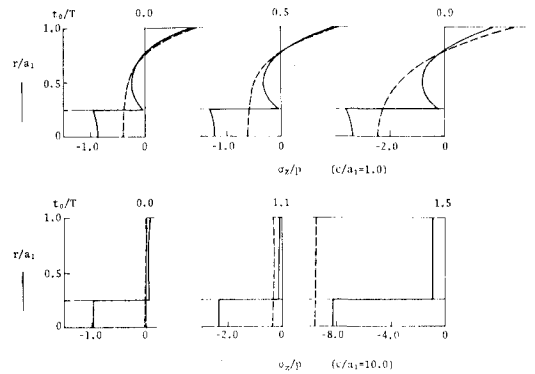


図-3 軸方向応力 σ_z の r 方向の分布 ($z=c/2$)

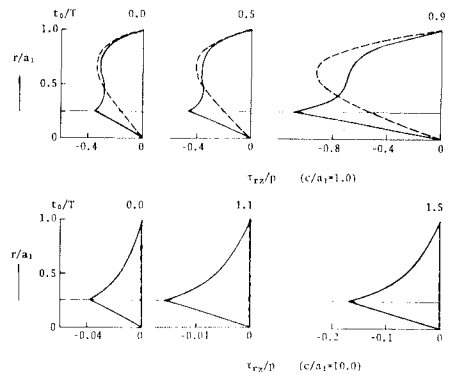


図-4 せん断応力 τ_{rz} の r 方向の分布 ($z=c$)

とせん断応力 τ_{rz} (図-4) の半径方向の分布と $z=c/2$ における σ_z の半径方向の分布 (図-3) を示した。いずれも周期が小さくなれば、各々の応答値は大きくはなっているが特に円柱と円筒の接触面におけるせん断応力が非常に大きくはなっていることがわかる。

※参考文献 1) 数岡 能町; 土木学会地震工学部会報告集, 冊35号, p.94, 1979. 2) 松岡 能町; 土木学会第44回年次学術講演会報告集, 冊14号, p.94, 1979.