I-247　浮板構造の有限水深波による弾性応答解析

大阪市立大学　正員　○小林 治俊
大阪市立大学　正員　　園田 恵一郎
大阪市立大学大学院　　川口 和也

1 まえがき

有限水深波と弾性浮体の相互作用に関する研究は、Garrison[1] による浅い吃水の無限長円柱の Green 関数を用いた解析以外，現在のところ見当らないようである。一方，有限水深波と剛浮体の相互作用については Black 等[2]，井島等[3] などの研究がある。この中では，井島等の定式化が最も直截的であり，しかも適用性が広いものと思われる。本研究は，井島等の手法を応用，拡張し有限長の弾性浮体の弾性応答を厳密な境界値問題として取扱うものである。

2 速度ポテンシャル

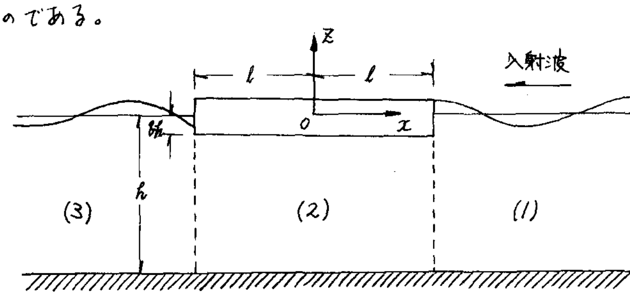

図-1

本研究では図1に示された弾性浮体の2次元平面波による弾性応答を取扱い，流体は，非圧縮，非粘性の微小振幅波であり，弾性浮体は両端自由な梁と見なす。

図の様に $x=\pm l$，$z=-\delta h$ によって分けられる領域(1)(2)(3)における速度ポテンシャルを $\Phi_k(x,z,t)$，$(k=1,2,3)$ とし波の角周波数を σ とすれば $\Phi_k=\phi_k(x,z)\,e^{i\sigma t}$ （i=虚数，t=時間）で，ϕ_k は次のラプラスの方程式 (1) を満足せねばならない。　$\Delta\phi_k=0$ ——(1)

(2・1) 領域(1)，(3) の速度ポテンシャル　ϕ_1，ϕ_3 に対する自由表面と水底条件は，g=重力の加速度とすれば，

$$\partial\phi/\partial z=\sigma^2\phi/g \quad (z=0) \quad \text{——(2)}, \qquad \partial\phi/\partial z=0 \quad (z=-h) \quad \text{——(3)}$$

式(2)(3)を満足し，更に式(1)と $x=\pm\infty$ での放射条件を満足する解は，

$$\phi_1=\left\{Ae^{ik(x-l)}+Be^{ik(x-l)}\right\}\frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh}+\sum_{m=1}^{\infty}C_m e^{-k_m(x-l)}\frac{\cos k_m(z+h)}{\cos k_m h} \quad \text{——(4)}$$

$$\phi_3=Je^{ik(x+l)}\frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh}+\sum_{m=1}^{\infty}L_m e^{k_m(x+l)}\frac{\cos k_m(z+h)}{\cos k_m h} \quad \text{——(5)}$$

ここに A=入射波，k，k_m は次式の根。

$$kh\tanh kh=-k_m h\tan k_m h=\sigma^2 h/g \quad (m=1,2,3,\cdots) \quad \text{——(6)}$$

(2・2) 領域(2) の速度ポテンシャル　この領域では浮体の剛体運動に関与するもの，弾性運動に関与するものの2種の速度ポテンシャルが必要である。初めに剛体運動に対する ϕ_2^R を求める。

浮体の重心の静止位置を $(0, Z_0)$ とし，静止位置からの浮体重心の水平，鉛直変位と回転角の複素振幅を夫々 ξ，η，ω とすれば浮体の重心運動は次式で表わされる。

$$x_0=\xi e^{i\sigma t}, \quad z_0=Z_0+\eta e^{i\sigma t}, \quad \delta=\omega e^{i\sigma t} \quad \text{——(7)}$$

これより浮体下面の鉛直変位は　$y=-\delta h+(\eta+\omega x)e^{i\sigma t}$ ——(8)　となる。

従って，浮体の剛体運動に関する速度ポテンシャル ϕ_2^R に対する条件式は，

$$\partial\phi_2^R/\partial z=i\sigma(\eta+\omega x) \quad (z=-\delta h) \quad (9) \qquad \partial\phi_2^R/\partial z=0 \quad (z=-h) \quad \text{——(10)}$$

式(9)(10)を満足し，更に式(1)を満たす解は　$R=r\pi/\zeta h$，$\zeta=1-\delta$　として次式で与えられる。

$$\phi_2^R = \sum_{r=0}^{\infty}\left(H_r \frac{\cosh Rx}{\cosh Rl} + I_r \frac{\sinh Rx}{\sinh Rl}\right)\cos R(z+\xi h) + \frac{i\sigma}{2\xi h}\left\{\eta\left[(z+h)^2 - x^2\right] + \omega x\left[(z+h)^2 - \frac{x^2}{3}\right]\right\} \quad \text{——(11)}$$

井島等[3]は上式第2項の代数解に対し，式(9)右辺をフーリエ級数展開することにより次式を採用している。

$$2i\frac{h}{l}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\left\{\eta\sigma h\cos\mu_s x + \omega\sigma l^2\left(\frac{h}{l}\right)^2\frac{\sin\mu_s x}{\mu_s h}\right\}\frac{\cosh\mu_s(z+h)}{(\mu_s h)^2\sinh\xi\mu_s h}, \quad \mu_s = (2s+1)\pi/2l \quad \text{——(12)}$$

次に弾性運動に対する梁の横振動方程式は，W＝梁のたわみ，EI＝梁の曲げ剛性，ρ_p, ρ＝梁の単位長さ当りの密度，水の密度，流体圧力 $p = -\rho\,\partial\Phi_2^e/\partial t - \rho g W$ とすれば $EI\,\partial^4 W/\partial x^4 + \rho_p\,\partial^2 W/\partial t^2 = p$ ——(13)

梁と流体との運動学的条件は $\partial W/\partial t = \partial\Phi_2^e/\partial z$ ——(14) であるから式(13)(14)より ϕ_2^e に対する次式を得る

$$EI\,\partial^5\phi_2^e/\partial x^4\partial z - (\sigma^2\rho_p - \rho g)\,\partial\phi_2^e/\partial z - \rho\sigma^2\phi_2^e = 0 \quad \text{——(15)}$$

式(15)と水底条件 $\partial\phi_2^e/\partial z = 0$ を満足する式(1)の解として ϕ_2^e は式(16)で与えられ，k', k_n' は式(17)の根である。

$$\phi_2^e = \left(D\frac{\cos k'x}{\cos k'l} + E\frac{\sin k'x}{\sin k'l}\right)\frac{\cosh k'(z+h)}{\cosh\xi k'h} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(F_n\frac{\cosh k_n'x}{\cosh k_n'l} + G_n\frac{\sinh k_n'x}{\sinh k_n'l}\right)\frac{\cos k_n'(z+h)}{\cos\xi k_n'h} \quad \text{——(16)}$$

$$\left.\begin{aligned} k'h\tanh\xi k'h &= (\sigma^2 h/g)\,/\,\{EI(k'h)^4/\rho g h^4 - (\rho_p/\rho h)\sigma^2 h/g + 1\} \\ -k_n'h\tan\xi k_n'h &= (\sigma^2 h/g)\,/\,\{EI(k_n'h)^4/\rho g h^4 - (\rho_p/\rho h)\sigma^2 h/g + 1\} \end{aligned}\right\} \text{——(17)}$$

従って領域(2)の速度ポテンシャルは $\phi_2 = \phi_2^R + \phi_2^e$ ——(18)

3 浮体の運動方程式

(3・1) 剛体運動　浮体の質量を $M\,(=2\rho g\xi h l)$，重心廻りの慣性モーメントを $I\,(=\frac{2}{3}\rho g\xi h l^3)$ とすれば，浮体の水平，鉛直，回転に関する運動方程式は，圧力式を $p_k = -\rho\,\partial\Phi_k/\partial t - \rho g z$ とすると

$$M\frac{d^2x_0}{dt^2} = \int_{-\xi h}^{0}(p_3 - p_1)\,dz, \quad M\frac{d^2z_0}{dt^2} = \int_{-l}^{0}p_2\,dx - Mg, \quad I\frac{d^2\delta}{dt^2} = \int_{-l}^{l}p_2\,x\,dx + \int_{-\xi h}^{0}(p_1 - p_3)(z - \bar{z}_0)\,dz \quad \text{——(19)}$$

この3式より，ξ，η，ω が速度ポテンシャルの定数係数によって表わされる。

(3・2) 弾性運動　梁のたわみを，両端自由な梁の固有関数 $X_m(x)$ で展開する。

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} W_m X_m(x)\,e^{i\sigma t} \quad \text{——(20)} \qquad W_m\text{: 定数}$$

式(20)を式(13)に代入し，$X_m(x)$ の直交性を利用すれば未定定数 W_m が得られるが，更に式(14)をも満足する必要があるので式(14)の両辺に $X_m(x)$ をかけ，再度直交性を利用することにより，次の条件式を得る。

$$D\,Q_m^{(1)} + E\,Q_m^{(2)} + \sum_n\left(F_n Q_{mn}^{(1)} + G_n Q_{mn}^{(2)}\right) = 0 \quad \text{——(21)} \qquad Q_m^{(1)}\text{等は定数である。}$$

4 流体の連続条件式

$x = \pm l$ の仮想境界において浮体の側面における運動学的条件と，領域(1)と(2)，及び(2)と(3)の間の mass flux と energy flux の連続性が成立せねばならない。即ち

$$\left.\begin{aligned} x = l \text{ で} \quad \partial\phi_1/\partial x &= i\sigma\{\xi - (z - \bar{z}_0)\}, && 0 > z > -\xi h \\ &= \partial\phi_2/\partial x, && -\xi h > z > -h \quad : \phi_1 = \phi_2, \ -\xi h > z > -h \end{aligned}\right\} \text{——(22)}$$

$$\left.\begin{aligned} x = -l \text{ で} \quad \partial\phi_3/\partial x &= i\sigma\{\xi - (z - \bar{z}_0)\}, && 0 > z > -\xi h \\ &= \partial\phi_2/\partial x, && -\xi h > z > -h \quad : \phi_3 = \phi_2, \ -\xi h > z > -h \end{aligned}\right\} \text{——(23)}$$

式(22)(23)に速度ポテンシャル(4)(5)(18)及び式(19)より得られた ξ, η, ω を代入する。次に $0 > z > -h$ における $\cosh k(z+h)$, $\cos k_n(z+h)$ の直交系の性質，$-\xi h > z > -h$ における $\cos R(z+\xi h)$ の直交系の性質を利用し，式(22)(23)にガラーキン法を適用し，速度ポテンシャルの未定定数より成る6群の無限連立方程式を導き，式(21)と併せて7群の連立方程式を得る。これを解くことにより速度ポテンシャルが決定され，その結果，浮体の弾性応答が確定することになる。

5 参考文献

(1) C. J. Garrison, JFM, Vol. 39 (1969)　(2) J. L. Black et al, JFM, Vol. 46 (1971)，(3) 井島ら，土木学会論文報告集 No. 202 (1972)