

岩手大学工学部 正員 岩崎 正二  
 北海道大学工学部 正員 能町 純雄  
 電力中央研究所 正員 高野 博

## 1. まえがき

構造物の基礎から入射した衝撃波は構造物内を伝播し端部で反射重複を繰り返して時間の経過に伴って定常振動を示すものである。したがって過渡的状态における構造物の応答挙動は、その構造物の動的定常挙動とは異なっているはずであり、一般的にこれを評価することは極めて困難である。そこで本論文では簡単な構造物として片持ばりを取り上げ、その固定端に力積衝撃が作用した場合によって過渡的挙動を検討する。すなわちばりは Timoshenko ばりとし、衝撃として指数関数型の速度入力を与え、入力信号が放端部に達する以前の固定端モーメントに注目して議論を進める。計算の方法は周知の Timoshenko ばり理論に空間方向にフーリエ変換、時間方向にラプラス変換を用い、固定端速度と固定端モーメントの関係式を誘導する方法によった。

## 2. 解析理論

Timoshenko 理論による横振動に対する基礎微分方程式は次の様になる。

$$\frac{\partial V^*}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 y^*}{\partial t^2} \quad (1) \quad V^* - \frac{\partial M^*}{\partial x} = \rho I \frac{\partial^3 \psi^*}{\partial t^2} \quad (2)$$

$$V^* = \kappa A G \left( \frac{\partial y^*}{\partial x} - \psi^* \right) \quad (3) \quad M^* = -EI \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \quad (4)$$

ここに  $M^*$  はモーメント、 $V^*$  はせん断力、 $\psi^*$  は曲げモーメントのみによるたわみ角、 $\rho$  は質量の密度、 $\frac{\partial y^*}{\partial x} - \psi^*$  はせん断ひずみ、 $I$  は断面二次モーメント、 $A$  は断面積、 $\kappa$  はせん断変形に対する補正係数を表わす。

一端が固定支持されている半無限長ばりの応答を考える。最初に (1) ~ (4) 式に  $V_{x=0}^* = V_0$ ,  $\psi_{x=0}^* = 0$  の境界条件のもとで Fourier 変換を施す。ただし (1), (4) 式に cosine 変換, (2), (3) 式には sine 変換を行なう。さらに初期変位がゼロの条件のもとでラプラス変換を施し、 $V^*$ ,  $M^*$ ,  $y^*$ ,  $\psi^*$  のラプラス変換を  $V$ ,  $M$ ,  $Y$ ,  $\Psi$  で表わすと次のようなマトリックス方程式となる。

$$\begin{bmatrix} m & 0 & -\rho s^2 A & 0 \\ 1 & m & 0 & -\rho s^2 I \\ \frac{1}{\kappa A G} & 0 & m & 1 \\ 0 & \frac{1}{EI} & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S[V] \\ C[M] \\ C[Y] \\ S[\Psi] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

ただし  $V = \int_0^\infty V^* e^{-st} dt$ ,  $S[V] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty V \sin mx dx$ ,  
 $Y = \int_0^\infty y^* e^{-st} dt$ ,  $C[Y] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty Y \cos mx dx$ ,  
 であり、他もこれに準ずるものである。

(5) 式の連立方程式を解くと

$$S[V] = \frac{\sqrt{A}(\lambda^3 + \lambda P^2)V_0}{(\lambda^2 + n_1^2)(\lambda^2 + n_2^2)} \quad (6)$$

$$C[Y] = -\frac{\gamma^2(\lambda^2 + P^2 + \gamma/\gamma^2)V_0}{E(\lambda^2 + n_1^2)(\lambda^2 + n_2^2)} \quad (8)$$

$$C[M] = -\frac{AV_0\lambda^2}{(\lambda^2 + n_1^2)(\lambda^2 + n_2^2)} \quad (7)$$

$$S[\Psi] = \frac{\gamma\lambda V_0}{E\sqrt{A}(\lambda^2 + n_1^2)(\lambda^2 + n_2^2)} \quad (9)$$

ここで  $\left. \begin{aligned} n_1^2 \\ n_2^2 \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ P^2(1 + \gamma^2) \pm \sqrt{P^4(1 - \gamma^2)^2 - 4P^2\gamma} \right\}$   
 $\lambda^2 = m^2A, \quad P^2 = \frac{S^2A}{C_0^2}, \quad C_0^2 = \frac{E}{\rho}, \quad \gamma = \frac{A}{I}, \quad \gamma^2 = \frac{2(1 + \nu)}{\kappa}$

(6) ~ (9) 式を  $x$  方向に Fourier 逆変換すると

$$V = \frac{V_0}{n_1^2 - n_2^2} (n_1^2 e^{-n_1 \xi} - n_2^2 e^{-n_2 \xi}) - \frac{P^2 V_0}{n_1^2 - n_2^2} (e^{-n_1 \xi} - e^{-n_2 \xi}) \quad (10)$$

$$M = -\frac{\sqrt{A} V_0}{n_1^2 - n_2^2} (n_1 e^{-n_1 \xi} - n_2 e^{-n_2 \xi}) \quad (11)$$

$$Y = -\frac{\gamma^2 V_0}{E\sqrt{A}(n_1^2 - n_2^2)} (n_1 e^{-n_1 \xi} - n_2 e^{-n_2 \xi}) + \frac{(\gamma^2 P^2 + \gamma) V_0}{E\sqrt{A}(n_1^2 - n_2^2)} \left( \frac{1}{n_1} e^{-n_1 \xi} - \frac{1}{n_2} e^{-n_2 \xi} \right) \quad (12)$$

$$\Psi = \frac{\gamma V_0}{EA(n_1^2 - n_2^2)} (e^{-n_1 \xi} - e^{-n_2 \xi}) \quad (13) \quad \text{ただし} \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{A}}$$

衝撃点固定端における曲げモーメント  $M_0$  は (10), (12) 式より  $M_0 = EAY_0 P / (P\gamma^2 + \sqrt{P^2\gamma^2 + \gamma})$  (14)  
 同様に初等はり理論による同じ条件の曲げモーメントは  $M_0 = EAY_0 P / \sqrt{\gamma}$  (15)  
 となる。以上の式から長時間域で両式は一致するが初期状態は互に異なることがわかる。又 (14) 式より

$$M_0 = \frac{EAY_0}{\gamma^2 - 1} \frac{S}{S^2 - K_1^2} - \frac{EAY_0}{(\gamma^2 - 1)\gamma} \frac{1}{\sqrt{S^2 + K_2^2}} - \frac{EAY_0 \gamma K_1}{\gamma^2 - 1} \frac{1}{\sqrt{S^2 + K_2^2}} \frac{K_1}{\sqrt{S^2 - K_1^2}} \quad (16)$$

ただし  $K_1^2 = \frac{C_0^2}{r^2 \gamma^2 (\gamma^2 - 1)}, \quad K_2^2 = \frac{C_0^2}{r^2 \gamma^2}, \quad r^2 = \frac{I}{A}, \quad \dot{Y}_0 = \frac{\partial Y_0}{\partial t}$

(16) 式をラプラス逆変換すると衝撃点での曲げモーメントが次のように表わされる。

$$M_0^*(t) = \frac{EA}{\gamma^2 - 1} \int_0^t v_0(\tau) \cosh K_1(t - \tau) d\tau - \frac{EA}{(\gamma^2 - 1)\gamma} \int_0^t v_0(\tau) J_0\{K_2(t - \tau)\} d\tau \\ - \frac{EA\gamma K_1}{\gamma^2 - 1} \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} v_0(\tau) \sinh K_1(\tau_1 - \tau) d\tau \cdot J_0\{K_2(t - \tau_1)\} \quad (17)$$

(t, m)

ここで  $v_0(t)$  は固定端速度入力を表わす。

### 3. 数値計算例

$t = 0, \infty$  で速度、加速度ともにゼロである条件を満足する速度入力として  $v_0(t) = C'I e^{-at} \sin bt$  を仮定する。はり断面は円形断面を考えはりの長さを 10 m とした。数値計算に用いた断面諸元は以上のとおりである。

$$E = 2.4 \times 10^6 \text{ t/m}^2, \quad \nu = 0.167, \quad \kappa = 0.875, \quad \rho = 0.234 \text{ t/sec/m}^3$$

$$a = b = 1.006 \times 10^3, \quad r = 0.75, 1.00, \quad 0 < t < 3.1 \times 10^{-3} \text{ (sec)}$$

$$C' = 5.0$$

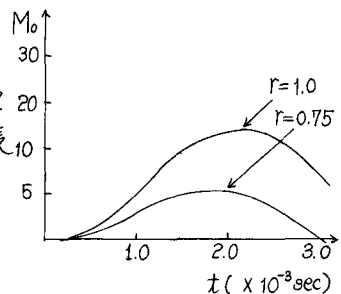


図-1 衝撃点の曲げモーメント

参考文献; 小坪清真他: 各支点で異なる地震波を受ける橋梁の応答解析  
土木学会論文集 1970.3